Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2009/2010
Matematica 1

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 17 giugno 2010

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e Domande teoriche, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, detto **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

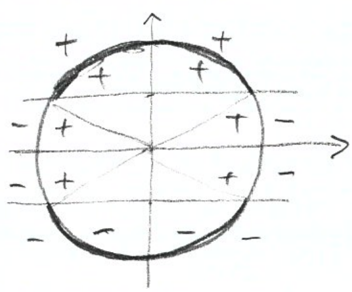
Domande elementari.

1. (4 punti) Risolvere le disequazioni

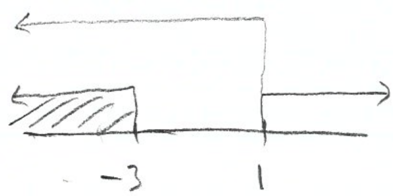
$$\sqrt{\frac{2\sin x - 1}{2\sin x + 1}} > 0$$
$$\ln\frac{x+3}{x-1} < 0$$

$\sqrt{\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}} > 0$ sempre quando $\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1} > 0$

$\boxed{\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi}$ e $\boxed{\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi}$



$\ln\frac{x+3}{x-1} < 0$ $\quad\begin{cases}\frac{x+3}{x-1} > 0\\ \frac{x+3}{x-1} < 1\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{x+3}{x-1} > 0\\ \frac{\cancel{x}+3-\cancel{x}+1}{x-1} < 0\end{cases}$



$\boxed{x < -3}$

Domande teoriche.

1. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi per una funzione reale di variabile reale.
   (3 punti) Si consideri la funzione $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ data da

   $$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 2, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

   Stabilirne l'immagine, il massimo ed il minimo, e verificare l'applicabilità del teorema dei valori intermedi.

2. (3 punti) Fornire la definizione di limite finito di una funzione reale di variabile reale per $x \to \infty$.
   (3 punti) $\boxed{\text{Utilizzando la definizione data sopra}}$, dimostrare che

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\,x + 1}{x - 1} = 2.$$

Esercizi.

1. (5 punti) Studiare la funzione

   $$f(x) = \frac{(4\,e^x - 1)(e^x + 2)}{e^x - 1}.$$

2. (2 punti) Calcolare la media della funzione

   $$f(x) = x^2\,e^{-|x-1|}$$

   nell'intervallo $[0,2]$.

3. (5 punti) Dire quale delle seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ è lineare e determinarne la matrice di rappresentazione nella base canonica:

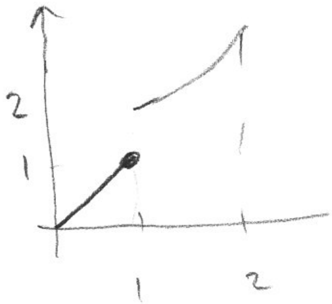
   $$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= (x, z+1) \\ f_2(x,y,z) &= (x+y-z, 2y-3z) \\ f_3(x,y,z) &= (x-1, z) \end{aligned}$$

4. (2 punti) Determinare le radici complesse dell'equazione

   $$z^3 - 8 = 0$$

   e calcolarne modulo ed argomento.

Domande teoriche



① $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ (x-1)^2+2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

$$f([0,2]) = [0,1] \cup (2,3)$$

Massimo $(2,3)$ Minimo $(0,0)$

Funzione discontinua $\Rightarrow$ teorema non applicabile

② $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$: $\left| \frac{2x+1}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon$ $\quad \left| \frac{\cancel{2x}+1-\cancel{2x}+2}{x-1} \right| < \varepsilon$

$\frac{3}{|x-1|} < \varepsilon$ $\quad |x-1| > \frac{3}{\varepsilon}$ $\quad$ Se $x \to +\infty$ possiamo assumere $x-1 > 1$

Allora $x-1 > \frac{2}{\varepsilon}$ $\quad x > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$ $\Rightarrow M_\varepsilon = 1 + \frac{2}{\varepsilon}$

Esercizi ② $\langle f \rangle \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 e^{-|x-1|}\,dx =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x-1}\,dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 e^{1-x}\,dx$$

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx =$$

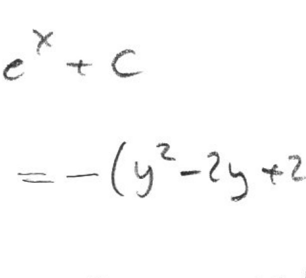
$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -\int y^2 e^y\,dy = -(y^2 - 2y + 2)e^y = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{e}[e-2] + e[-10e^{-2} + 5e^{-1}] \right\} = \frac{1}{2}\left\{ 6 - \frac{12}{e} \right\} = 3 - \frac{6}{e}$$

④ $z^3 - 8 = 0$ $\quad z = \sqrt[3]{8}$

$|z| = 2\sqrt{2}$



$z_1 = 2\sqrt{2}$

$z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{2}{3} i\pi}$

$z_3 = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{4}{3} i\pi}$

(1)

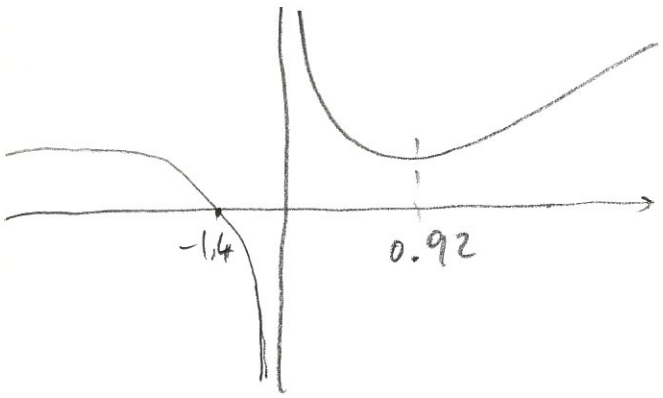
$$f(x) = \frac{(4e^x - 1)(e^x + 2)}{e^x - 1} \qquad D: x \neq 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-2}{-1} = 2 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty \qquad f(x) = 0 \text{ per } 4e^x - 1 = 0 \quad x = \ln\frac{1}{4} \simeq -1.4$$

$$f'(x) = \frac{[4e^x(e^x+2) + (4e^x-1)e^x](e^x-1) - e^x(4e^x-1)(e^x+2)}{(e^x-1)^2} =$$

$$= \frac{4e^{2x} - 8e^x - 5}{(e^x-1)^2} e^x \qquad f' = 0 \text{ per } x = \ln\frac{5}{2} \simeq 0.92$$



(3) Solo la f_2 è lineare

Matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$