Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009

Matematica 1
Appello del 12 dicembre 2008

Nome:.................................
N. matr.:................................ Ancona, 12 dicembre 2008

Domande elementari.

1. (2 punti) Risolvere l'equazione trigonometrica
$$2\,\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$$

2. (2 punti) Risolvere la disequazione
$$x^4 - 6x^2 + 8 > 0.$$

Domande teoriche.

1. *(i)* (3 punti) Dare la definizione di funzione convessa per tangenti in un intervallo (a, b), specificando le condizioni sulla derivabilità della funzione. Discutere quindi la relazione tra la convessità della funzione e le sue derivate.

   (ii) (3 punti) Si consideri la funzione $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2\,\cos x, & -1 \le x \le 0 \\ 1 - \cos x & 0 < x \le 1 \end{cases}$$
   È una funzione convessa? È derivabile una volta? È derivabile due volte?

2. *(i)* (3 punti)Enunciare e dimostrare il teorema della media nel calcolo integrale.

   (ii) (3 punti) Si consideri quindi una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $F(x)$ la sua funzione integrale. Dimostrare l'equivalenza tra il teorema della media per la funzione $f(x)$ ed il teorema del valor medio (o di Lagrange) per la funzione $F(x)$.

1) $2(1-\cos^2 x)-\cos x-1=0$ $\qquad 2\cos^2 x+\cos x-1=0$

$\cos x=\frac{1}{2}, -1$ $\qquad x=\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \pi$

2) $y=x^2$ $\quad y^2-6y+8>0$ $\quad y_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=\left<\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$

$(y>0)$

$0<y<2\ ;\ y>4$

$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\ ;\ x<-2$ e $x>2$

---

1) $f(x)$ è convessa e derivabile una volta

---

1) $$\int_0^{2\pi}\left[e^x|\cos x|+x|\sin x|\right]dx=\int_0^{\pi/2}(e^x\cos x+x\sin x)dx+$$
$$+\int_{\pi/2}^{\pi}(-e^x\cos x+x\sin x)dx-\int_{\pi}^{3\pi/2}(e^x\cos x+x\sin x)dx+$$
$$+\int_{3\pi/2}^{2\pi}(e^x\cos x-x\sin x)\,dx=\frac{1}{2}\left(8\pi+e^{2\pi}+2e^{3\pi/2}+2e^{\pi/2}-1\right)$$

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\,\frac{\cos x+\sin x}{2}+C \qquad \int x\sin x\,dx=\sin x-x\cos x$$

Esercizi.

1. (4 punti) Calcolare l'integrale
$$\int_0^{2\pi} \left(e^x\,|\cos x|\, + x\,|\sin x|\right) dx$$

2. (4 punti) Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{e^{|x|/2}}{e^{x-1}-1}.$$

3. (3 punti) Per quali valori di μ e λ i vettori $v_1 = (\mu, 2, \lambda)$, $v_2 = (-1, 1, 3)$ e $v_3 = (2, -1, 1)$ formano una base ortogonale? Posto $\mu = 1$, per quale valore di λ essi sono linearmente dipendenti?

4. (3 punti) Stabilire la convergenza degli integrali impropri
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{e^x - 1 - x}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1 - x}\,dx$$

---

4) $e^x - 1 - x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - x = \frac{x^2}{2}, \quad x \to 0$

$e^x - 1 - x \sim e^x, \quad x \to \infty$

$\frac{\sin x}{e^x - 1 - x} \sim \frac{2}{x}, \quad x \to 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{e^x - 1 - x}\,dx$ NON CONV.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x - 1 - x}$ converge

2) $e^{x-1}-1=0$ per $x=1 \Rightarrow D: x\neq 1$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x/2}}{e^{x-1}-1} & x<0\\[2ex] \dfrac{e^{x/2}}{e^{x-1}-1} & x>0\end{cases}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 1^{\mp}} f(x) = \mp\infty$

$f(x)\neq 0$ sempre

$f(0)=\dfrac{1}{\frac{1}{e}-1}=\dfrac{e}{1-e}$

$$f'(x)=\begin{cases} e^{1-x/2}(-)\dfrac{e+e^x}{2(e-e^x)^2} & x>0\\[2ex] e^{1-x/2}\dfrac{e-3e^x}{2(e-e^x)^2} & x<0\end{cases}$$

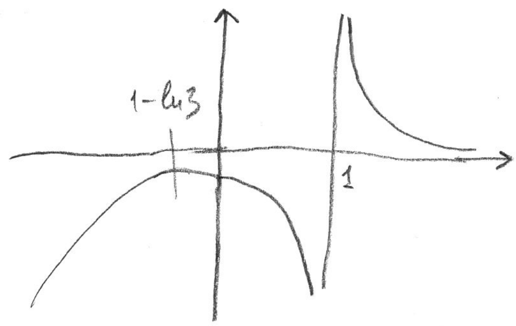
$f'(x)=0 \quad x=\ln\left(\frac{e}{3}\right)=$

$=1-\ln 3$

$$f'(0)=\begin{cases}\dfrac{-e(1+e)}{2(e-1)^2} & x>0\\[2ex] \dfrac{e(e-3)}{2(e-1)^2} & x<0\end{cases}$$

$x=0$

punto angoloso



---

3) $v_2\cdot v_3=0$

$$\begin{cases} v_1\cdot v_2 = -\mu+2+3\lambda=0\\ v_1\cdot v_3 = 2\mu-2+\lambda=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} 7\lambda+2=0 \quad \lambda=-\frac{2}{7}\\ \mu=2-\frac{6}{7}=\frac{8}{7}\end{cases}$$

$\mu=1 \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&\lambda\\-1&1&3\\2&-1&1\end{pmatrix}$

$dt(A)=0 \rightarrow 4-2(-1-6)+\lambda(1-2)=0$

$4+14-\lambda=0 \quad \underline{\lambda=18}$