Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009

Matematica 1
Appello del 12 dicembre 2008

Nome:................................
N. matr.:................................ Ancona, 12 dicembre 2008

Domande elementari.

1. (2 punti) Risolvere l'equazione

$$(x^2 - 4)\ln(x^2 - 1) = 0.$$

2. (2 punti) Risolvere la disequazione

$$4\sin^2 x - 1 < 0.$$

Domande teoriche.

1. *(i)* (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema sulla monotonia delle funzioni derivabili.

   (ii) (3 punti) Fare un esempio di una funzione non decrescente con derivata prima negativa.

2. *(i)* (3 punti) Sia $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, ..., n$ una matrice quadrata ad elementi reali. Enunciare e dimostrare il teorema sulla matrice inversa.

   (ii) (3 punti) Determinare se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

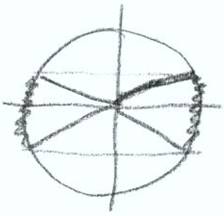
   ammette inversa e giustificare la risposta.

1) $x^2-1>0 \qquad x>1 \;\text{ e }\; x<-1$

$x^2-4=0 \qquad x=\pm 2$

$x^2-1=1 \qquad x^2=2 \qquad x=\pm\sqrt{2}$

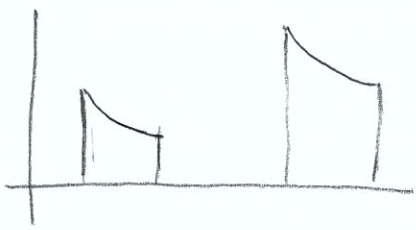
2) $4\sin^2 x-1<0 \qquad \sin^2 x<\frac{1}{4} \qquad -\frac{1}{2}<\sin x<\frac{1}{2}$



$-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad \frac{5}{6}\pi<x<\frac{7}{6}\pi$

---

1)



2) La terza riga è combinazione lineare delle prime due. Quindi determinante $=0$ e $\nexists$ l'inversa

---

1) $$\int_0^{2\pi} e^{|x-\pi|}\,|\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/2} e^{\pi-x}\cos x\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} e^{\pi-x}\cos x\,dx +$$

$$-\int_{\pi}^{3\pi/2} e^{x-\pi}\cos x\,dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} e^{x-\pi}\cos x\,dx = (*)$$

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\,\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{2}+c$$

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = e^{x}\,\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{2}+c$$

$$(*) = \frac{1}{2}e^{-\pi}\left(2\pi\cosh\frac{\pi}{2}+e^{2\pi}+e^{3\pi/2}+e^{\pi/2}-1\right)$$

Esercizi.

1. (4 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} e^{|x-\pi|}\,|\cos x\,|\;dx$$

2. (4 punti) Studiare la funzione

$$f(x)=\sqrt{2\,x^2+1}-\sqrt{|x^2-1|}.$$

3. (3 punti) Stabilire la convergenza degli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{e^x-1}\,dx \qquad\qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x-1}\,dx$$

4. (3 punti) Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$x^4+3\,x^2-4=0.$$

---

2) $D=\mathbb{R}$ $\quad f(-x)=f(x)$ funzione pari $\quad f(0)=0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right]=+\infty$$

$f'(x)$ per $x>1$: $\quad \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{2\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{(2x^2+1)(x^2-1)}}\,x$

$f'(+1)\longrightarrow\infty \quad f(1)=\sqrt{3} \qquad x=1$ cuspide

$f'(x)$ per $0<x<1$: $\quad \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{\ }\sqrt{\ }}\,x$

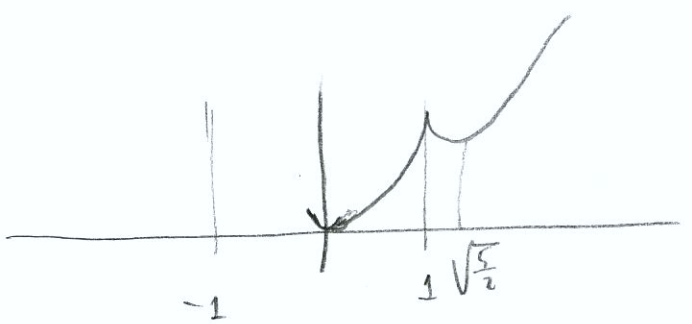
$f'(1)\longrightarrow\infty \quad f(1)=\sqrt{3}$

$f'(x)=0$ per $\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{2x^2+1}$ MAI

$f'(x)=0$ per $2\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2+1}$

$4(x^2-1)=2x^2+1$

$2x^2=5 \qquad x=\sqrt{\frac{5}{2}}$



3) $e^x - 1 = x + o(x)$, $x \to 0$ $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\cos x}{e^x - 1}\, dx$ diverge

$e^x - 1 \sim e^x$, $x \to +\infty$ $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1}\, dx$ converge

4) $y = x^2$ $\quad y^2 + 3y - 4 = 0$ $\quad y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

$y^2 = 1$ $\quad x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

$y^2 = -4$ $\quad x = \begin{cases} 2i \\ -2i \end{cases}$