Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009

Matematica 1
Appello del 12 dicembre 2008

Nome:...............................

N. matr.:............................... Ancona, 12 dicembre 2008

Domande elementari.

1. (2 punti) Risolvere la disequazione
$$e^{4x} - 3e^{2x} - 4 > 0.$$

2. (2 punti) Risolvere l'equazione
$$\ln\left(\frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}\right) = 0$$

Domande teoriche.

1. *(i)* (3 punti) Dare la definizione di punto angoloso, cuspide e flesso a tangente verticale per una funzione reale di variabile reale.

   (ii) (3 punti) Classificare quindi i punti di non derivabilità delle funzioni
$$f_1(x) = x^{1/3}, \qquad f_2(x) = |x|^{1/2}, \qquad f_3(x) = \sin|x|,$$
   definite nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$.

2. *(i)* (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del valor medio di Lagrange per una funzione reale di variabile reale.

   (ii) (3 punti) Si considerino quindi le funzioni
$$f_1(x) = |\cos x| \qquad \text{e} \qquad f_2(x) = \cos(x)^2$$
   e si discuta l'applicabilità del teorema di Lagrange a tali funzioni nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

Esercizi.

1. (4 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,|\cos x|\,dx$$

2. (4 punti) Studiare la funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{|\sin x| - 2}.$$

3. (3 punti) Stabilire quale delle seguenti applicazioni, f_i: $V_1 \to V_2$, con $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^3$ è lineare:

$$\begin{aligned} f_1 &: (x, y, z) \to (x + y + z + 1, 2x - y, x - 2y + z) \\ f_2 &: (x, y, z) \to (x + y + z, x - y - z, xy + z) \\ f_3 &: (x, y, z) \to (x + y - z, 2x - 2y + z, 3x - 2y + 2z), \end{aligned}$$

e determinarne la matrice di rappresentazione usando la base canonica sia per lo spazio V_1 che per lo spazio V_2. Determinare quindi la matrice di rappresentazione nella base $\{(-1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 1)\}$ per V_1 e la base canonica per V_2.

4. (3 punti) Stabilire la convergenza degli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} + x^2}{x}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx$$

1) $e^{4x} - 3e^{2x} - 4 > 0 \qquad y = e^{2x} > 0 \;!!$

$y^2 - 3y - 4 > 0 \qquad y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad y < -1 \;\text{ e }\; y > 4 \qquad e^x > 2 \qquad x > \ln 2$

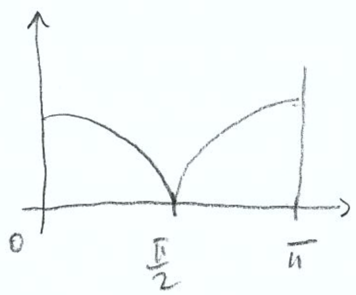
2) $\frac{2x^2+3x-1}{x^2+2x+1} = 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

---

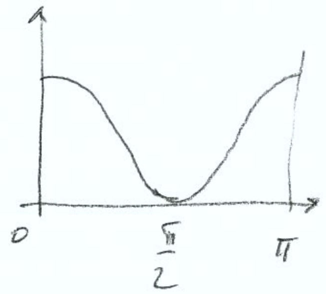
1) $f_1 = x^{1/3} \qquad x = 0$ flesso a tang. verticale

$f_2 = |x|^{1/2} \qquad x = 0$ cuspide ; $f_3(x) = \sin|x| \qquad x = 0$ punto angoloso

2) f_1 :



f_2 :



Non applicabile ad f_1 perché non derivabile

Applicabile ad f_2

---

1) $\int_0^{2\pi} |\sin x| \cdot |\cos x| \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \cdot \cos x \, dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin x \cos x \, dx +$

$- \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin x \cos x \, dx = (*)$

$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c \qquad (*) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$

2) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sin x}{-\sin x - 2} = \dfrac{\sin x}{\sin x + 2} & x \in [-\pi, 0] \\ \dfrac{\sin x}{\sin x - 2} & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

$\sin x \pm 2 \neq 0$

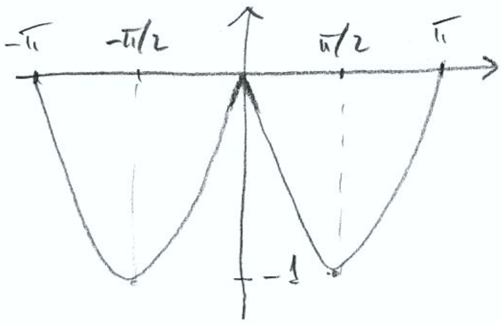
NO ASINTOTI VERT.

$$f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\cos x}{(2+\sin x)^2} & x \in [-\pi, 0] \\ -\dfrac{2\cos x}{(\sin x - 2)^2} & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$f'(0) = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$ $x=0$ punto angoloso

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$ entrambi punti di max



---

3) Solo f_3 è lineare.

Nella base canonica:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nell'altra base:
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

---

4) $$\frac{\sqrt{x} + x^2}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \ x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x^2}{x}\,dx \ \text{converge}$$

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 + x^2 + 1} \sim \frac{1}{x^2}, \ x \to \infty \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \ \text{converge}$$