Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009

Matematica 1
Appello del 12 dicembre 2008

Nome:................................
N. matr.:................................ Ancona, 12 dicembre 2008

Domande elementari.

1. (2 punti) Risolvere la disequazione trigonometrica
$$\frac{2\,\sin x - 1}{2\,\cos x + 1} < 0$$
nell'intervallo $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

2. (2 punti) Risolvere l'equazione
$$(\ln x)^4 - 10\,(\ln x)^2 + 9 = 0.$$

Domande teoriche.

1. *(i)* (2 punti)Definire gli integrali impropri nei due casi di dominio illimitato e di funzione illimitata e dare la definizione formale della convergenza. Enunciare quindi i due criteri, del confronto e del confronto asintotico.

   (ii) (4 punti) Utilizzando la definizione, stabilire la convergenza o meno degli integrali impropri delle funzioni del tipo $x^{-\alpha}$, con α reale positivo. Ottenere quindi gli stessi risultati utilizzando il caso $\alpha = 1$ ed il teorema del confronto.

2. *(i)* (3 punti) Dimostrare che una funzione derivabile nel punto x_0 è ivi continua.

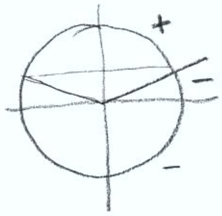
   (ii) (3 punti) Si consideri quindi la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \cos x, & x \geq 0 \\ \cos x, & x < 0 \end{cases}$$
   È derivabile in $x = 0$? Come si comporta la sua derivata vicino ad $x = 0$? Come si classifica il punto $x = 0$ per la funzione $f'(x)$? È possibile prolungarla per continuità in $x = 0$?

1) $\dfrac{2\sin x-1}{2\cos x+1}<0$ $\quad 2\sin x-1 = ①$ $\quad 2\cos x+1 = ②$

Valori notevoli ① $\sin x = \frac{1}{2}$ $\quad x=\frac{\pi}{6}$

② $\cos x = -\frac{1}{2}$ $\quad x \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$2\cos x+1>0$ sempre



$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{6}$

2) $\ln x = y$ $\quad y^4-10y^2+9=0$ $\quad y^2_{1,2} = 5\pm\sqrt{25-9} = 5\pm 4 = \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases}$

$y=\pm 1, \pm 3$

$x = e, \frac{1}{e}, e^3, \frac{1}{e^3}$

---

2) $f(x)$ non continua per $x=0$. Ma $f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \geq 0 \\ -\sin x, & x<0 \end{cases}$

Per $x=0$ f' non è definita, ma si può prolungare per continuità.

1) $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_{\varepsilon}^{1} = \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$; $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} 1/(1-\alpha) & \alpha<1 \\ \infty & \alpha>1 \end{cases}$

$\displaystyle\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx$ converge per $\alpha<1$ e diverge per $\alpha>1$

$\displaystyle\int_1^{a} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_1^{a} = \frac{a^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$; $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{a^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} 1/\alpha-1 & \alpha>1 \\ \infty & \alpha<1 \end{cases}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx$ converge per $\alpha>1$ e diverge per $\alpha<1$

Per $\alpha=-1$, gli integrali impropri divergono.

Siccome $\frac{1}{x^\alpha} > \frac{1}{x}$ per $\alpha<1$ e $x>1$, $\frac{1}{x^\alpha}$ per $\alpha<1$ diverge all'infinito

$\frac{1}{x^\alpha} > \frac{1}{x}$ per $\alpha>1$ e $x<1$, $\frac{1}{x^\alpha}$ per $\alpha>1$ diverge per $x \simeq 0$

Esercizi.

1. (4 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| e^{-|x-\pi/2|}\, dx$$

2. (4 punti) Studiare la funzione $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{\cos x}{|\sin x| - 2}.$$

3. (3 punti) Calcolare i primi due termini significativi del polinomio di Taylor della funzione

$$f(x) = x - \sin x \, \cos x.$$

4. (3 punti) Per quale valore di α la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non ammette inversa? Sia α_0 tale valore; si calcoli la matrice inversa per $\alpha = \alpha_0 - 1$

---

1) $$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| e^{-|x-\pi/2|}\, dx = -\int_{-\pi}^{0} \sin x\, e^{x-\pi/2}\, dx + \int_{0}^{\pi/2} \sin x\, e^{x-\pi/2}\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\, e^{\pi/2 - x}\, dx$$

$$\int e^{x} \operatorname{sen} x\, dx = e^{x} \frac{\sin x - \cos x}{2} \qquad \int e^{-x} \sin x\, dx = -e^{x} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}$$

$$= 1 + e^{\pi/2} + \frac{1}{2}\left(e^{-\pi/2} + e^{-3\pi/2}\right)$$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{\sin x - 2} & x \in [0, \pi] \\ \dfrac{\cos x}{-\sin x - 2} & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$ $\qquad |\operatorname{sen} x| - 2 \neq 0$ sempre

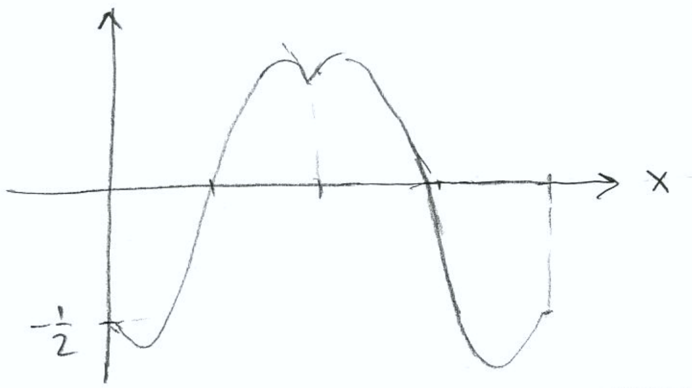
no asintoti

$f(0) = f(2\pi) = -\frac{1}{2}$; $f(\pi) = \frac{1}{2}$ $\qquad f(x) = 0 \to \cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1 + 2\sin x}{(2 - \sin x)^2} & x \in [0, \pi] \\ \dfrac{1 + 2\sin x}{(2 + \sin x)^2} & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$ $\qquad f'(\pi) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{cases}$ $\quad x = 0$ punto angoloso

$f'(x) = 0 \qquad x \in [0, \pi] \to \sin x = \frac{1}{2} \qquad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

$x \in [\pi, 2\pi] \to \sin x = -\frac{1}{2} \qquad x = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$



3) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$x - \sin x \cos x = x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) = \cancel{x} - \Big[\cancel{x} - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!\,2!} + \frac{1}{5!}\right)x^5 - \left(\frac{1}{6!} + \frac{1}{3!\,4!} + \frac{1}{5!\,2!} + \frac{1}{7!}\right)x^7\Big] = \frac{2}{3}x^3 - \frac{961}{8}x^5 + \dots$

4) $\det(A) = \alpha[-1] + 1[2]$

$= -\alpha + 2 \qquad \boxed{\alpha_0 = 2}$

$\alpha = 2 - 1 = 1 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$