Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2009/2010
Matematica 1

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 27 febbraio 2010

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e Domande teoriche, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, detto **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Domande elementari.

1. (4 punti) Risolvere

$$x^4 + 3\,x^2 - 4 = 0$$
$$x^4 - 3\,x^2 - 4 < 0$$

Soluzione: $x^4+3x^2-4=0 \qquad x^2=t \qquad t^2+3t-4=0$

$$t_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2} = \begin{cases} -4 \longrightarrow \text{NO } x \\ 1 \end{cases} \qquad \boxed{x_{1,2} = \pm 1}$$

$x^4-3x^2-4<0 \qquad x^2=t \qquad t^2-3t-4<0$

$$t_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases} \qquad -1<t<4 \Rightarrow -1<x^2<4 \Rightarrow 0<x^2<4$$

$$\boxed{-2<x<2}$$

Soluzioni esercizi

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-x-6}{x^2-1}}$ Dominio : $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-1} > 0$

$x^2-x-6=0$ per $x_{1,2}=-2,\ 3$

$x^2-1=0$ per $x_{3,4}=\pm 1$

		-2	-1	1	3
N	+	−	−	−	+
D	+	+	−	+	+
Tot	+	−	+	−	+

$\{x<-2\}\cup\{-1<x<1\}\cup\{x>3\}$

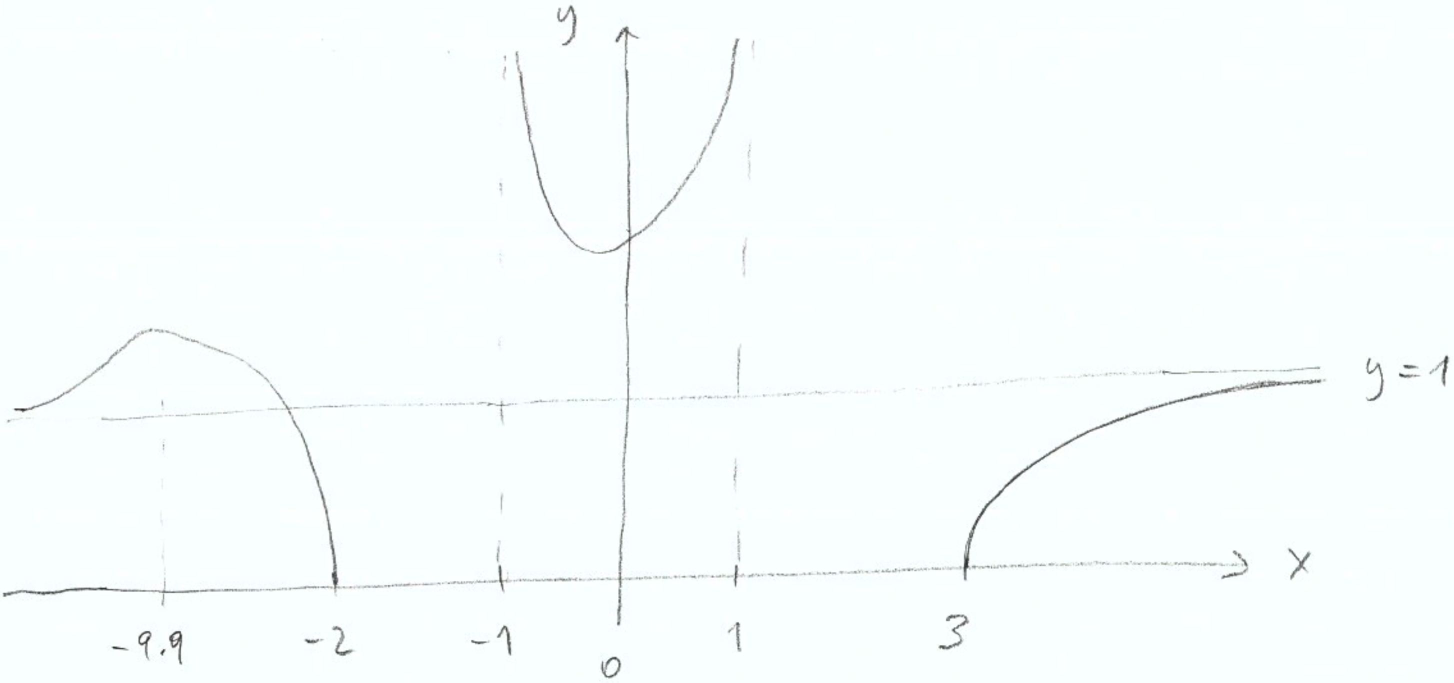
$f(x)=0 \quad x=-2,\ 3 \quad f(0)=\sqrt{6}$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ ASINTOTO ORIZZ. $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$

ASINT. VERT.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-x-6}}\ \frac{(2x-1)(x^2-1)-2x(x^2-x-6)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2+10x+1}{(x^2-1)^2}\,\frac{1}{2}\sqrt{}$$

$$f'(x)=0 \quad x=-5\pm\sqrt{24}=-5\pm 2\sqrt{6}\approx \begin{cases}-9.9\\ -0.1\end{cases}$$



Domande teoriche.

1. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per una funzione reale di variabile reale.
   (3 punti) Discutere l'applicazione del teorema degli zeri alla funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ data da
   $$f(x) = 1 - |x|$$
2. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat per una funzione reale di variabile reale.
   (3 punti) Discutere l'applicazione del teorema di Fermat alla funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ data da
   $$f(x) = |\sin x|$$

Esercizi.

1. (5 punti) Studiare la funzione
   $$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}}.$$
2. (2 punti) Calcolare la media della funzione
   $$f(x) = \frac{e^{|x|}}{e^{|x|} + 2}$$
   nell'intervallo $[-1, 2]$.
3. (5 punti) Stabilire la convergenza dell'integrale improprio
   $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - \sin x}}.$$
4. (2 punti) Determinare le radici complesse dell'equazione
   $$z^4 + 3\,z^2 - 4 = 0$$
   e calcolarne modulo ed argomento.

2) $$\langle f \rangle = \frac{1}{2+1}\int_{-1}^{2} \frac{e^{|x|}}{e^{|x|}+2}\,dx = \frac{1}{3}\left\{ \int_{-1}^{0} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{e^{x}}{e^{x}+2}\,dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{ \int_{0}^{1} \frac{e^{x}}{e^{x}+2}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{e^{x}}{e^{x}+2}\,dx \right\} = \frac{1}{3}\left\{ \ln|e^{x}+2|\Big|_{0}^{1} + \ln|e^{x}+2|\Big|_{0}^{2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{ \ln\frac{e+2}{3} + \ln\frac{e^{2}+2}{3} \right\} = \frac{1}{3}\ln\frac{(e+2)(e^{2}+2)}{9}$$

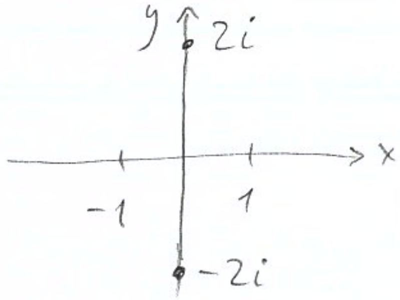
---

3) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-\sin x}}$ impropio in $x=0$ $\qquad x-\sin x \sim x-\left(x-\frac{x^{3}}{3!}\right) = \frac{x^{3}}{3!}$ per $x \to 0$

Quindi $\frac{1}{\sqrt{x-\sin x}} \sim \frac{6}{x^{3/2}}$, $x \to 0$ che <u>diverge</u>

4) $z^{4}+3z^{2}-4=0 \qquad z^{2}=w \qquad w^{2}+3w-4=0$

$$w_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} -4 \longrightarrow z_{1,2} = \pm 2i \\ 1 \longrightarrow z_{3,4} = \pm 1 \end{cases}$$



$z_1 = 2i \qquad \rho = 2 \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}$

$z_2 = -2i \qquad \rho = 2 \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$z_3 = 1 \qquad \rho = 1 \qquad \varphi = 0$

$z_3 = 1 \qquad \rho = 1 \qquad \varphi = \pi$