Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2009/2010
Matematica 1

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 22 gennaio 2010

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e Domande teoriche, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, detto **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Domande elementari.

1. (4 punti) Risolvere le equazioni

$$x^3 - 2\,x^2 - x = 0$$
$$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

Domande elementari

$x(x^2 - 2x - 1) = 0$

$x_1 = 0$

$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$ $\quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$

Domande teoriche.

1. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del valor medio di Lagrange per una funzione reale di variabile reale.
   (3 punti) Discutere l'applicazione del teorema di Lagrange alla funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = |x|$.

2. (3 punti) Fornire la definizione di limite finito di una funzione reale di variabile reale per $x \to -\infty$.
   (3 punti) Utilizzando la definizione di limite, dimostrare che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2\,x^2 + 1}{3\,x^2 - 1} = \frac{2}{3}.$$

Esercizi.

1. (5 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x}$$

   nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

2. (2 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\,\pi} |\cos x|\,|\sin x|\,dx.$$

3. (5 punti) Stabilire la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - \sin x}}.$$

4. (2 punti) Determinare le radici complesse dell'equazione

$$z^4 - z^2 - 6 = 0$$

   e calcolarne modulo ed argomento.

Domande teoriche

1) Parte b: f non derivabile in $x=0$, teorema non applicabile

2) Parte b: $\left| \frac{2x^2+1}{3x^2-1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon \qquad \left| \frac{3(\cancel{2x^2}+1)-2(\cancel{3x^2}-1)}{3(3x^2-1)} \right| < \varepsilon$

$$\frac{5}{3} \frac{1}{|3x^2-1|} < \varepsilon \qquad -\frac{3}{5}\varepsilon < \frac{1}{3x^2-1} < \frac{3}{5}\varepsilon$$

$$\begin{cases} 3x^2-1 > \frac{5}{3\varepsilon} \\ 3x^2-1 > -\frac{5}{3\varepsilon} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 > \frac{5}{9\varepsilon} + \frac{1}{3} \\ x^2 > -\frac{5}{9\varepsilon} + \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \left\{x > \sqrt{\frac{5}{9\varepsilon}+1}\right\} \cup \left\{x < -\sqrt{}\right\} \\ \text{sempre} \end{matrix}$$

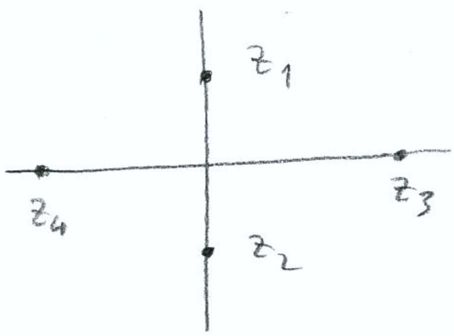
$$M_\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{9\varepsilon}+1}$$

Esercizi (4) $\quad z^4 - z^2 - 6 = 0 \qquad y = z^2$

$$y^2 - y - 6 = 0 \qquad y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$$

$z^2 = -2 \qquad z_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$

$z^2 = 3 \qquad z_{3,4} = \pm\sqrt{3}$



$|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$

$|z_3| = |z_4| = \sqrt{3}$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$

$\varphi_3 = 0 \qquad \varphi_4 = \pi$

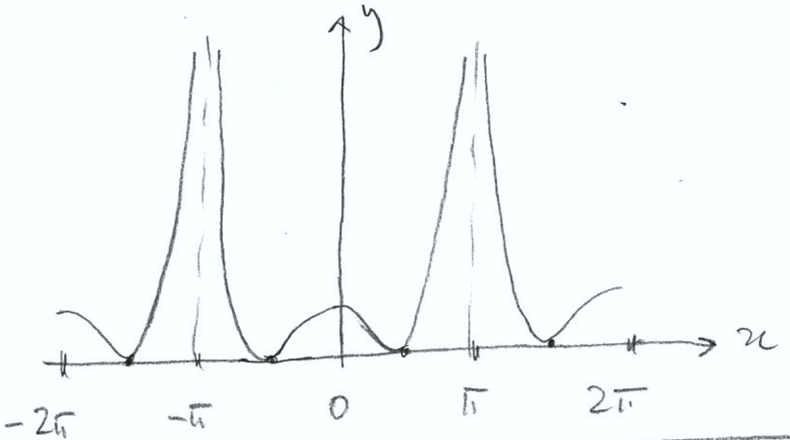
① $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1+\cos x}$ $\qquad \cos x \neq -1 \qquad x \neq \pm \pi$

$f(\pm 2\pi) = f(0) = \frac{1}{2} \qquad f(x) = 0$ per $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi$

$\lim_{x \to \pm\pi^{\pm}} f(x) = +\infty \qquad x = \pm\pi$ asintoti verticali

$$f'(x) = \frac{-2\cos x \sin x (1+\cos x) + \sin x \cos^2 x}{(1+\cos x)^2} = -\cos x \sin x \frac{2+\cos x}{(1+\cos x)^2}$$

$f'(x) = 0$ per $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi$



---

② $$\int_0^{2\pi} |\cos x| \cdot |\sin x| \, dx = 4 \int_0^{\pi/2} dx \cos x \sin x = 4 \left[\frac{\sin^2 x}{2} \right]_0^{\pi/2} = 2$$

---

③ $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - \sin x}}$$

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) + o(x^3) = \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad x \to 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x - \sin x}} \sim \frac{\sqrt{6}}{x^{3/2}}, \quad x \to 0$$

$\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}} dx$ DIVERGE, quindi pure $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - \sin x}}$

per il criterio del confronto asintotico