Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009

Matematica 1
Appello del 21 marzo 2009

Nome:................................
N. matr.:...............................

Ancona, 21 marzo 2009

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome, ed eventualmente numero di matricola, va conseganto assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e **Domande teoriche**, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio di ciascun gruppo di domande.

Domande elementari.

1. (2 punti) Risolvere la disequazione
$$e^{x^2-5x+6} > 1.$$
2. (2 punti) Risolvere l'equazione
$$\ln(x^2-2x+1) = 0$$
.

Domande teoriche.

1. *(i)* (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat per una funzione reale di variabile reale;

   (ii) (3 punti) si discuta l'applicabilità del teorema alla funzione $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$
$$f(x) = 1 - (1 + |x|)^2.$$

2. *(i)* (3 punti) Definire induttivamente il determinante di una matrice $n \times n$. Dimostrarne quindi le seguenti proprietà: (a) linearità rispetto ad una riga; (b) moltiplicazione di una riga o colonna per uno scalare; (c) moltiplicazione della matrice per uno scalare; (d) scambio di due righe; (e) matrice con due righe o colonne uguali.

   (ii) (3 punti) Utilizzando le proprietà del determinante sopra menzionate, dimostrare che la matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$
   ha determinante nullo.

Esercizi.

1. (4 punti) Calcolare la media della funzione
$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$
   nell'intervallo $[1, 2]$.

2. (4 punti) Studiare la funzione
$$f(x) = x^2\, e^{(2x+2)/(2x-1)}.$$

3. (3 punti) Stabilire la convergenza degli integrali impropri
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x - \cos x}}\, dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sin x - \cos x + 2}\, dx.$$

4. (3 punti) Per quali valori di α e β i vettori $e_1 = (\alpha + \beta, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ ed $e_4 = (0, \alpha - \beta, 0, 1)$ formano una base per $\mathbb{R}^4$? E per quali valori di α e β formano una base ortogonale?

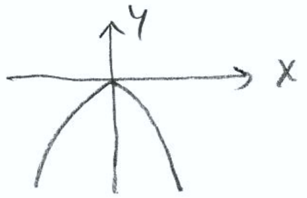
Domande elementari

1) $e^{x^2-5x+6} > 1 \qquad x^2-5x+6>0 \qquad x<2$
$x>3$

2) $\ln(x^2-2x+1)=0 \qquad x^2-2x+1=1 \qquad x_1=0$
$x_2=2$

Domande teoriche

1) (ii)



$f(x)$ non derivabile in $x=0$

2) (ii) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 0$

Esercizi

1) $$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$$

3) $1+\sin x-\cos x \sim 1+x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = x\ , \quad x\to 0$

$\frac{1}{\sqrt{1+\sin x-\cos x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\ , \ x\to 0 \qquad$ INTEGRABILE

$\left|\frac{e^{-x}}{\sin x-\cos x+2}\right| \leq \frac{e^{-x}}{1/2} = 2e^{-x} \qquad$ INTEGRABILE

2) $f(x) = x^2 e^{\frac{2x+2}{2x-1}}$ $\quad D: x \neq \frac{1}{2}$ $\quad f(x) \geq 0$ sempre

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$

$f(x) = 0$ solo per $x = 0$

Sia $g(x) = \dfrac{2x+2}{2x-1}$ $\quad f(x) = x^2 e^{g(x)}$

$$f'(x) = 2x e^{g(x)} + x^2 g'(x) e^{g(x)} = x\left(2 + x g'(x)\right) e^{g(x)}$$

$$g'(x) = \frac{2(2x-1) - 2(2x+2)}{(2x-1)^2} = -\frac{6}{(2x-1)^2}$$

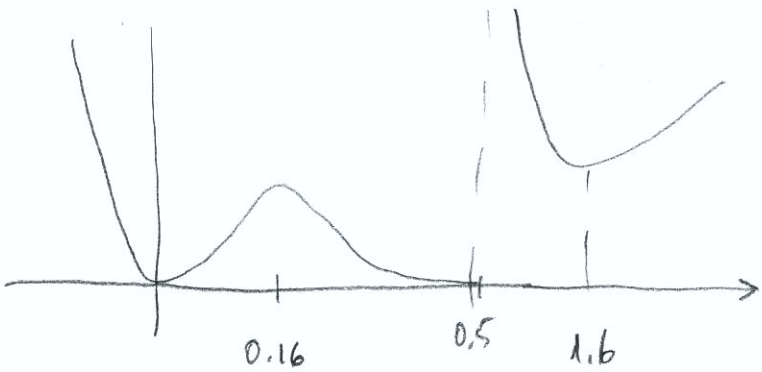
$f'(x) = 0$ per $x = 0$ e $2 - \dfrac{6x}{(2x-1)^2} = 0$

$2(2x-1)^2 - 6x = 0$

$8x^2 - 14x + 2 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-16}}{8} = \dfrac{7 \pm \sqrt{33}}{8}$

≈ 0.16 e 1.6



4) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha+\beta \neq 0$

Base ortogonale per $\alpha = \beta$