Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2009/2010
Matematica 1

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 06 settembre 2010

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e Domande teoriche, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, detto **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Domande elementari.

1. (4 punti) Risolvere le disequazioni

$$(i) \quad \sqrt{\frac{|x|-1}{|x|+1}} > 0$$

$$(ii) \quad \sqrt{\frac{|x|+3}{|x|-1}} < 0$$

(i) $\frac{|x|-1}{|x|+1} > 0$ $\quad |x|+1 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$|x|-1 > 0$ per $\boxed{x<-1}$ e $\boxed{x>1}$

(ii) Mai

Domande teoriche.

1. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
   (3 punti) Discutere l'applicazione del teorema alla funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 < x \le 2; \end{cases}$$

   calcolarne quindi la funzione integrale e stabilirne le proprietà di continuità e derivabilità.

2. (3 punti) Introdurre la definizione di media di una funzione reale di variabile reale su un intervallo $[a, b]$. Quindi, enunciare e dimostrare il teorema della media.
   (3 punti) Discutere l'applicazione del teorema della media alla funzione del punto precedente.

Esercizi.

1. (4 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = e^{|x-\pi/2|} \cos 2x$$

   nell'intervallo $x \in [0, \pi]$.

2. (3 punti) Calcolare la media della funzione dell'esercizio precedente, sempre nell'intervallo $[0, \pi]$.

3. (4 punti) Stabilire la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} e^{(x^n-1)/(x^3+1)}\, dx$$

   al variare di $n \in \mathbb{Z}$.

4. (3 punti) Dire per quali valori di λ la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   ammette inversa. Calcolare quindi la matrice inversa per λ tale che $det(A) = 4$.

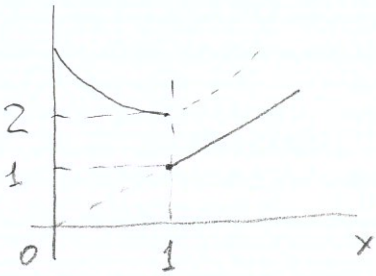
Domande teoriche (1) $f(x)$ presenta una discont. a salto in $x=1$

Il teorema si applica e la funzione è integrabile perché si definiscono separatamente le somme di Riemann per $0 \le x \le 1$ e per $1 \le x \le 2$.

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad F(x) = \begin{cases} (x-1)^3/3 + 2x + 1/3 & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ x^2/2 + \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{2}\right) = x^2/2 + \frac{11}{6} & \text{per } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

F continua in $[0,2]$; ha in $x=2$ un punto angoloso

(2) $$\langle f \rangle = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{23}{6} - 0\right\} = \frac{23}{12}$$



$1 < \frac{23}{12} < 2$ quindi il teorema della media non si applica perché f non è continua

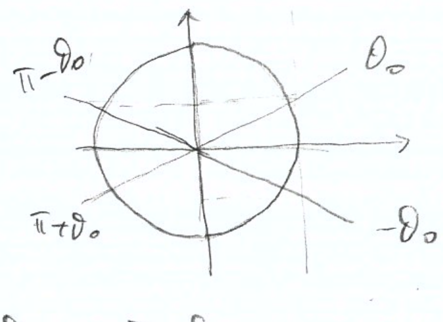
Esercizi (1) $f(x) = e^{|x-\pi/2|} \cos 2x \qquad D = [0, \pi]$

$f(0) = e^{\pi/2} \qquad f(\pi) = e^{\pi/2} \qquad f(\pi/2) = -1$ $\qquad f$ simmetrica rispetto ad $x = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\pi/2 - x} \cos 2x & 0 \le x \le \pi/2 \\ e^{x - \pi/2} \cos 2x & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\pi/2 - x}(-\cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x) \\ e^{x-\pi/2}(\cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x) \end{cases} \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$x = \frac{\pi}{2}$ è un punto angoloso

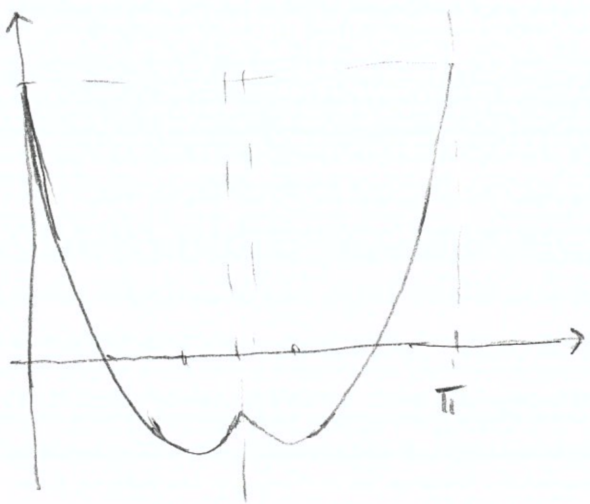


$\vartheta_0 = \tan^{-1} \frac{1}{2}$

$$f'(x) = 0 : \begin{cases} \tan 2x = -\frac{1}{2} \\ \tan 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x = \begin{cases} -\vartheta_0, \pi - \vartheta_0 \\ \vartheta_0, \pi + \vartheta_0 \end{cases} \qquad x = \begin{cases} \frac{\pi - \vartheta_0}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_0}{2} \\ \frac{\pi + \vartheta_0}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta_0}{2} \end{cases}$$

① (cont.) $f(x)=0$ per $\cos 2x = 0$ $\quad x=\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{4}\pi$



② $$\langle f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{\pi/2-x}\cos 2x\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{x-\pi/2}\cos 2x\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{\pi/2-x}\cos 2x\,dx = \left[e^{\pi/2-x}\,\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{\pi/2-x}\sin 2x\,dx =$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\left[e^{\pi/2-x}\,\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{\pi/2-x}\,\frac{\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{\pi/2}\right) - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} e^{\pi/2-x}\cos 2x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}\int_0^{\pi/2} e^{\pi/2-x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}\left(1+e^{\pi/2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} e^{\pi/2-x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{5}\left(1+e^{\pi/2}\right)$$

$\Rightarrow$ Per la simmetria della funzione, $\langle f\rangle = \frac{2}{5\pi}\left(1+e^{\pi/2}\right)$

---

③ $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x^n-1}{x^3+1}}\,dx$ converge per $n>3$ e diverge per $n\leq 3$

Infatti $f(x)\sim e^{-x^m}$ con $m>1$ per $n>3$,

$f(x)\to 1$ per $n<3$ $\quad$ per $x\to+\infty$

$f(x)\to e^{-1}$ per $n=3$