Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2008/2009
Matematica 1

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 11 dicembre 2009

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome ed eventualmente numero di matricola, va consegnato assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e Domande teoriche, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, detto **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio in ciascun gruppo di domande.

Domande elementari.

1. (2 punti) Risolvere l'equazione

$$\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} = 0.$$

2. (2 punti) Risolvere la disequazione

$$\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} > 0.$$

Domande teoriche.

1. *(i)* (3 punti) Enunciare e dimostrare il Teorema del valor medio di Lagrange per una funzione reale di variabile reale.

   (ii) (3 punti) Applicare quindi il teorema alla funzione $f(x) = \sin x$, con $x \in [\pi/4, 3\,\pi/4]$

2. *(i)* (3 punti) Fornire la definizione di limite infinito di una funzione reale di variabile reale per $x \to +\infty$.

   (ii) (3 punti) Utilizzando la definizione di limite, dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Esercizi.

1. (5 punti) Dire quale, tra le seguenti applicazioni, f_1, f_2 ed f_3: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= (x + y + z, x) \\ f_2(x, y, z) &= (x - y + 1, x + y) \\ f_3(x, y, z) &= (x + y - 2, z) \end{aligned}$$

   è lineare. Per l'applicazione lineare, determinare la matrice di rappresentazione usando la base $\{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ in $\mathbb{R}^3$ e la base canonica in $\mathbb{R}^2$.

2. (2 punti) Dire per quale valore di λ le matrici

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ \lambda & -4 \end{pmatrix}$$

   commutano.

3. (5 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = \ln g(x) \qquad \text{con} \qquad g(x) = \frac{x^2 - 2\,x}{x^2 + 2} + 1.$$

4. (2 punti) Usando la definizione, dimostrare che l'integrale improprio

$$f(x) = \int_0^\pi \cos x \, \ln(\sin x) \, dx$$

   converge; calcolarne quindi il valore.

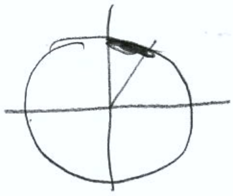
Domande elementari

1) $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$; $\sin x = \cos x$; $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ NON ACC.

2) $\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} > 0$

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x > \cos x \end{cases}$$



$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

Domande teoriche

1) (ii) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad f'(c) = \dfrac{f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} = 0$

$f'(x) = \cos x$ $\quad \boxed{c = \frac{\pi}{2}}$

2) (ii) $\forall M > 0$ $\quad \dfrac{x^4+1}{x^2-1} > M$ $\quad x^4 + 1 > M(x^2-1)$

$x^4 - Mx^2 + 1 + M > 0$

$x^2_{1,2} = \dfrac{M \pm \sqrt{M^2 - 4(M+1)}}{2}$ $\quad x^2 > \dfrac{M + \sqrt{M^2 - 4(M+1)}}{2}$

$N = \left\{ \dfrac{M + \sqrt{M^2 - 4(M+1)}}{2} \right\}^{1/2}$

Esercizi

1) È lineare solo f_1. $\quad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ \lambda & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ \lambda & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-12 & 2 \\ 3\lambda-4 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 3\lambda-4 & \lambda-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \implies \lambda = 2$$

3) $g(x) > 0$ $\qquad \dfrac{x^2-2x+x^2+2}{x^2+2} > 0$ $\qquad 2x^2-2x+2 > 0$

$\Delta = 1-4 = -3 < 0$

$D = \mathbb{R}$ $\qquad$ sempre verificata

$g(0) = 1 \qquad f(0) = \ln 1 = 0$

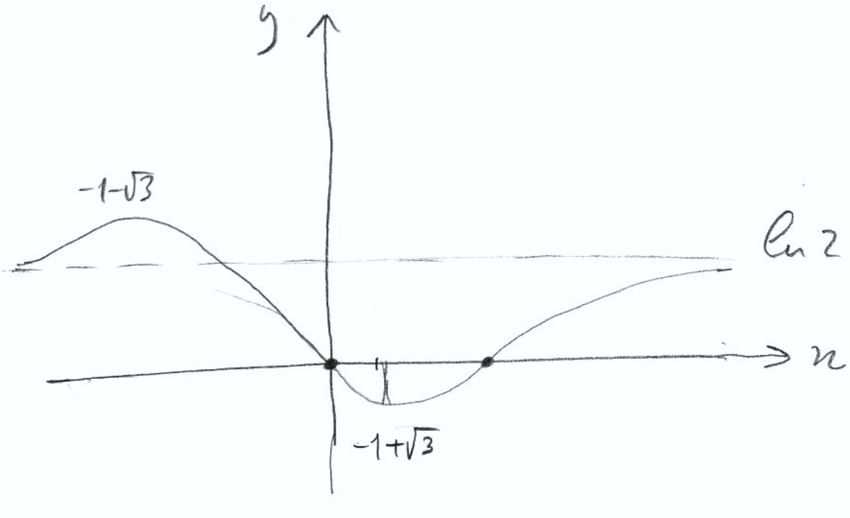
$f(x) = 0$ per $g(x) = 1$ $\qquad \dfrac{x^2-2x}{x^2+2} = 0 \qquad x = \begin{cases} 0 & \text{già trovato} \\ 2 & \to f(2) = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)}\, g'(x) \qquad g'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+2) - 2x(x^2-2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^2+4x-4}{(x^2+2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \approx \begin{cases} -2,7 \\ 0,7 \end{cases}$$

$g'(x) > 0$ per valori esterni



4) $$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \cos x \ln(\sin x)\, dx = \Big[\sin x \ln(\sin x)\Big]_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \sin x \frac{\cos x}{\sin x}\, dx =$$

$$= 2 \sin\varepsilon \ln(\sin\varepsilon) - \Big[\sin x\Big]_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} = 2\sin\varepsilon\big[\ln(\sin\varepsilon) - 1\big] \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$