Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009

Matematica 1
Appello del 9 gennaio 2009

Nome:................................
N. matr.:................................ Ancona, 9 gennaio 2009

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome, ed eventualmente numero di matricola, va conseganto assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e **Domande teoriche**, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, **Esercizi.**
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio di ciascun gruppo di domande.

Domande elementari.

1. (2 punti) Risolvere la disequazione

$$\frac{x-\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}-1} > 0.$$

2. (2 punti) Risolvere l'equazione

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Domande teoriche.

1. *(i)* (3 punti) Definire induttivamente il determinante di una matrice $n \times n$. Dimostrarne quindi le seguenti proprietà: (a) linearità rispetto ad una riga; (b) moltiplicazione di una riga o colonna per uno scalare; (c) moltiplicazione della matrice per uno scalare; (d) scambio di due righe; (e) matrice con due righe o colonne uguali.

   (ii) (3 punti) Utilizzando le proprietà del determinante sopra menzionate, dimostrare che la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
ha determinante nullo.

2. *(i)* (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di de l'Hospital per una funzione reale di variabile reale.

   (ii) (3 punti) Calcolare quindi i limiti
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{e^{1/x}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{e^{1/x}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$$
sia utilizzando il teorema sia utilizzando altri metodi (limiti notevoli, equivalenze asintotiche, etc.) e discutere le concordanze e le discrepanze trovate.

Esercizi.

1. (4 punti) Calcolare la media della funzione
$$f(x) = e^x + e^{\sqrt{x}}$$
nell'intervallo $[0, 1]$.

2. (4 punti) Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{4\cos^2 x - 1}.$$

3. (3 punti) Per quali valori di α, β e γ le matrici A e B date da
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$
commutano?

4. (3 punti) Stabilire la convergenza degli integrali impropri
$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx$$
dove $f(x) = x^2 - \sin^2 x$.

DOMANDE ELEMENTARI

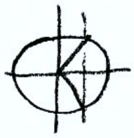
1) $\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}-1}>0$ $\qquad \begin{cases} x-\sqrt{x}-2>0 \\ 2\sqrt{x}-1>0 \\ x>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-\sqrt{x}-2<0 \\ 2\sqrt{x}-1<0 \\ x>0 \end{cases}$

$\sqrt{x}=t\geq 0 \qquad t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\left\langle \begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$

$\begin{cases} t>2 \\ t>\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} 0\leq t<2 \\ 0\leq t<\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow x>4$ e $x<\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\ \frac{1}{4}$

2) $2\cos^2 x+\cos x-1=0 \qquad \cos x=t \qquad 2t^2+t-1=0$

$t_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\left\langle \begin{matrix}-1\\1/2\end{matrix}\right.$



$x=\pi,\ \frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3}$

DOMANDE TEORICHE

1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\7&8&9\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&3\\3&3&3\\7&8&9\end{vmatrix}=0+\begin{vmatrix}1&2&3\\3&3&3\\1&2&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&3\\3&3&3\\6&6&6\end{vmatrix}=$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{2x}=\dfrac{1}{2}$ OK

Anche: $\dfrac{1-\cos x}{x^2}\sim\dfrac{1-1+x^2/2}{x^2}=$

$x\to$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{e^{1/x}}=\dfrac{-\infty}{+\infty}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{x}{e^{1/x}}\right)=-\dfrac{0}{+\infty}=0$

Anche $\dfrac{1}{x}=t \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-\ln t}{e^t}=-\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{e^t}=0$ OK

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^{1/x}}=\dfrac{+\infty}{1}=+\infty$ con de l'Hospital: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{e^{1/x}}=-\infty$ NO

NON È UNA F. I.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ con de l'Hospital $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{1}$ che non esiste

NON È UNA F. I.

ESERCIZI

1) $f(x) = e^x + e^{\sqrt{x}}$ $\langle f \rangle = \int_0^1 f(x)dx = e^x\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ $\sqrt{x} = t$
$x = t^2$
$dx = 2t\,dt$

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 e^{t}\,2t\,dt = e^{t^2}\Big|_0^1 = e-1$$

$$\langle f \rangle = e-1+e-1 = 2(e-1)$$

2) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{4\cos^2 x - 1}$ DOMINIO: $\cos x \neq \pm\frac{1}{2}$ $x \neq \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2}{3}\pi$

Periodica di periodo π, $f(-x) = f(x)$ → STUDIAMO IN $[0, \pi]$

$f(0) = f(\pi) = 0$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}^{\pm}} f(x) = \mp\infty$

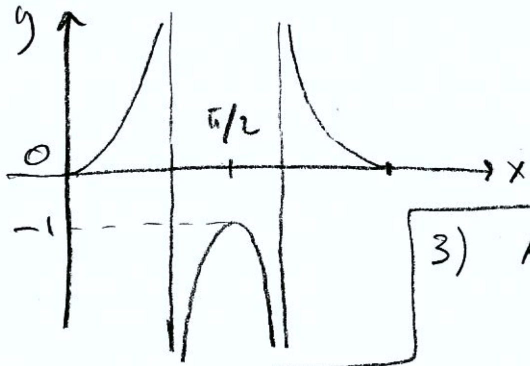
$$f'(x) = \frac{2\sin x\cos x(4\cos^2 x - 1) + 8\cos x\sin^3 x}{(4\cos^2 x - 1)^2} =$$

$\lim_{x \to \frac{2}{3}\pi^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

$$= \frac{6\sin x\cos x}{(4\cos^2 x - 1)^2}$$

$f' = 0$ per $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$f' > 0$ $f' < 0$
0 $\frac{\pi}{2}$ π
MAX MINIMO MAX



$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

3) $AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1+\beta & \alpha+\gamma & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \beta+\gamma & \gamma-\beta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ 1+\beta = \beta+\gamma \\ \alpha+\gamma = \gamma-\beta \end{cases} \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$

4) $f(x) = x^2 - \sin^2 x \sim x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^2 = \frac{1}{3}x^4$, $x \to 0$

$f(x) \sim x^2$, $x \to +\infty$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx$ DIVERGE $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ CONVERGE