Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009

Matematica 1
Appello del 9 gennaio 2009

Nome:................................
N. matr.:................................ Ancona, 9 gennaio 2009

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome, ed eventualmente numero di matricola, va conseganto assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e **Domande teoriche**, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio di ciascun gruppo di domande.

Domande elementari.

1. (2 punti) Risolvere la disequazione
$$\frac{x+\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}-1} > 0.$$
2. (2 punti) Risolvere l'equazione
$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$
nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Domande teoriche.

1. *(i)* (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi per una funzione reale di variabile reale;

   (ii) (3 punti) si discuta l'applicabilità del teorema alla funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & x \le 0 \\ -x^2 + 2x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

2. *(i)* (3 punti) Fornire la definizione rigorosa di limite infinito di una funzione reale di variabile reale per $x \to a$, con $a \in \mathbb{R}$.

   (ii) (3 punti) Utilizzando la definizione, dimostrare quindi che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esercizi.

1. (4 punti) Calcolare la media della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x \, \sin x}{1 + \sin^2 x}$$

   nell'intervallo $[0, \pi/2]$.

2. (4 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^{3/2}}{1 - \sqrt{x}}.$$

3. (3 punti) Stabilire la convergenza degli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\, dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\, dx$$

   dove $f(x) = x - \sin x \cos x$.

4. (3 punti) Per quali valori di α e μ i vettori $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (-1, -1, 1)$ ed $e_3 = (\alpha, 0, \mu)$ formano una base per $\mathbb{R}^3$? E per quali valori di α, β e μ i vettori $e_1 = (\alpha, 1, 1)$, $e_2 = (1, \beta, 1)$ ed $e_3 = (1, 1, \mu)$ formano una base ortogonale?

DOMANDE ELEMENTARI

1) $$\frac{x+\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}-1}>0 \longrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{x}-2>0 \\ 2\sqrt{x}-1>0 \\ x>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+\sqrt{x}-2<0 \\ 2\sqrt{x}-1<0 \\ x>0 \end{cases}$$

$\sqrt{x}=t$ numeratore: $t_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\left\langle \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}\right.$ $(t>0)$

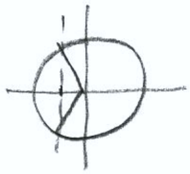
$$\begin{cases} t>1 \\ t>1/2 \end{cases} \cup \begin{cases} 0<t<1 \\ 0<t<1/2 \end{cases} \longrightarrow t>1,\ 0<t<\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$x>1,\ 0<x<\frac{1}{4}$$

2) $2\cos^2 x-\cos x-1=0$ $\quad \cos x=t \quad 2t^2-t-1=0$

$t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\left\langle \begin{matrix} -1/2 \\ 1 \end{matrix}\right.$

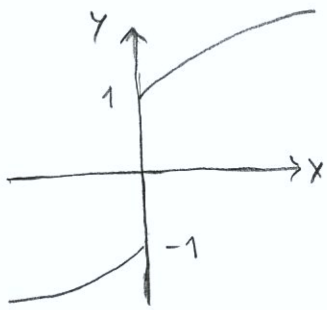


$x=\frac{2}{3}\pi,\ -\frac{2}{3}\pi$

$x=0$

DOMANDE TEORICHE

1) $$f(x)=\left\langle \begin{matrix} x^2+2x-1 & x\le 0 \\ -x^2+2x+1 & x>0 \end{matrix}\right.$$



NON CONTINUA
TEOREMA NON APPLICABILE

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$ $\quad \forall M>0;\quad \dfrac{1}{x^2}>M \quad x^2<\dfrac{1}{M} \quad \Rightarrow \delta_M=\dfrac{1}{M}$

ESERCIZI

1) $$\langle f\rangle=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx \overset{(t=\sin x)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\,dt=\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln 2$$

2) $f(x) = \dfrac{x^{3/2}}{1-\sqrt{x}}$ Dominio: $x \geq 0,\ x \neq 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

$f(0) = 0 \quad f(x) \neq 0$ per $x \neq 0$

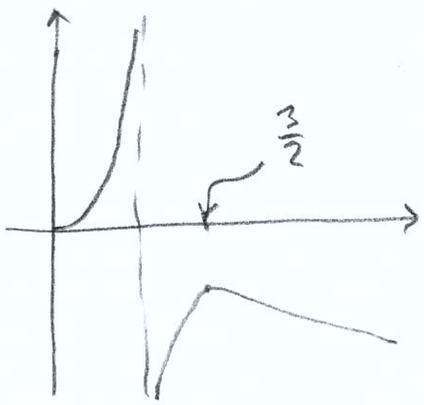
$$f'(x) = \frac{(3/2)x^{1/2}(1-\sqrt{x}) - x^{3/2}(-1/2)x^{-1/2}}{(1-\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{(3/2)\sqrt{x} - (3/2 - 1/2)\,x}{(1-\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{x} - 2x}{2(1-\sqrt{x})^2}$$; $f'(x) = 0$ per $x = 0$ e $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$

con $f' > 0$ per $0 < x \leq \frac{3}{2}$ $(x \neq 1)$

$f' < 0$ per $x > \frac{3}{2}$ $\quad x = \frac{3}{2}$ MASSIMO



3) $f(x) = x - \sin x \cos x$

$$f(x) \sim x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) = \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right)x^3 = \frac{2}{3}x^3,$$

$x \to 0$

$f(x) \sim x \ ,\ x \to \infty$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx$ DIVERGONO

4) $e_1 = (1,1,1) \quad e_2 = (-1,-1,1) \quad e_3 = (\alpha, 0, \mu)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & \mu \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \alpha(2) + \mu \cdot 0 \neq 0 \qquad \alpha \neq 0\ \forall \mu$$

$e_1 = (\alpha, 1, 1) \quad e_2 = (1, \beta, 1) \quad e_3 = (1, 1, \mu)$

$e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ \alpha + 1 + \mu = 0 \\ 1 + \beta + \mu = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\beta - 1 \\ \mu - \beta = 0 \\ \mu + \beta = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = -\frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$