Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009

Matematica 1
Appello del 9 gennaio 2009

Nome:................................
N. matr.:................................ Ancona, 9 gennaio 2009

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome, ed eventualmente numero di matricola, va conseganto assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e **Domande teoriche**, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio di ciascun gruppo di domande.

Domande elementari.

1. (2 punti) Risolvere l'equazione
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$
nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.
2. (2 punti) Risolvere la disequazione
$$\frac{x - \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} > 0.$$

Domande teoriche.

1. *(i)* (3 punti) Siano $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ due spazi vettoriali e sia $f : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ una funzione lineare. Enunciare e dimostrare il teorema di rappresentazione.

   (ii) (3 punti) Siano $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ed $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ due funzioniu lineari e siano A_1 ed A_2 le due matrici di rappresentazione nella base canonica di $\mathbb{R}^2$. Determinare la matrice di rappresentazione della composizione $f_1 \circ f_2$ e verificarlo direttamente.

2. *(i)* (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

   (ii) (3 punti) Illustrare l'estensione dell'integrale di Riemann a funzioni con discontinuità sul dominio d'integrazione. Trattare in dettaglio tutti i tipi di discontinuità per cui tale estensione è possibile.

Esercizi.

1. (4 punti) Calcolare la media della funzione
$$f(x) = \ln^2 x - 2 \ln x + 3$$
nell'intervallo $[1, 2]$.

2. (4 punti) Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x \ln x}{1 - 2 \ln x}.$$

3. (3 punti) Stabilire la convergenza degli integrali impropri
$$\int_0^1 \frac{1}{g(x)}\,dx \qquad\qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx$$
dove $f(x) = x\,e^{-x} \sin x - x^2$ e $g(x) = e^{-x} \sin x - x$.

4. (3 punti) Per quali valori di λ la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & \lambda \end{pmatrix}$$
ammette inversa? Calcolare la matrice inversa per $\lambda = 2$.

DOMANDE ELEMENTARI

1) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ $\quad \sin x = t \quad$ $2t^2 - t - 1 = 0$ $\quad t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{array}$

$$x = -\frac{5}{6}\pi, \ -\frac{\pi}{6}, \ \frac{\pi}{2}$$

2) $\dfrac{x - \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} > 0$ $\quad \begin{cases} x - \sqrt{x} - 2 > 0 \\ \sqrt{x} - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - \sqrt{x} - 2 < 0 \\ \sqrt{x} - 1 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$\sqrt{x} = t > 0 \quad t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{array}{l} -1 \\ 2 \end{array} \quad \begin{cases} t > 2 \\ t > 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \le t < 2 \\ 0 \le t < 1 \end{cases}$

$\{t > 2\} \cup \{0 \le t \le 1\}$ ovvero $\{x > 4\} \cup \{0 \le x \le 1\}$

DOMANDE TEORICHE

1) $f_1(x,y) = (x + 2y, 2x - y) \qquad f_2(x,y) = (3x + y, x - y)$

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad f(x,y) = (f_1 \circ f_2)(x,y)$

$A = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad f(x,y) = f_1(3x + y, x - y) =$

$$= (3x + y + 2(x - y), 2(3x + y) - (x - y)) =$$

$$= (5x - y, 5x + 3y)$$

ESERCIZI

1) $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x + 3 \qquad \langle f \rangle = \displaystyle\int_1^2 (\ln^2 x - 2\ln x + 3)\, dx$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + c$$

$$\int \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x - \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = x \ln^2 x - 2\int \ln x \, dx = x \ln^2 x - 2x(\ln x - 1) + c$$

$$\langle f \rangle = 2\ln^2 2 - 8\ln 2 + 7$$

2) $f(x) = \dfrac{x \ln x}{1 - 2\ln x}$ DOMINIO : $x > 0$; $\ln x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq \sqrt{e}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ $\lim_{x \to \sqrt{e}^{\pm}} f(x) = \mp\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $f(x) = 0$ per $x = 1$

$x = \sqrt{e}$ ASINTOTO V. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{2}$; $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x\right] = -\infty$ NO AS. OBLIQ.

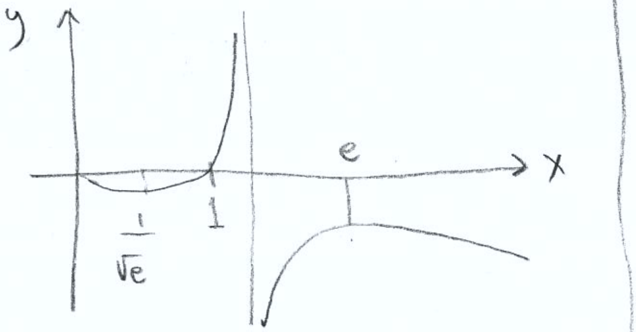
$$f'(x) = \frac{(1 + \ln x)(1 - 2\ln x) + \frac{2}{x} x \ln x}{(1 - 2\ln x)^2} = \frac{-2\ln^2 x + \ln x + 1}{(1 - 2\ln x)^2}$$

$f'(x) = 0$ per $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, e

$f' < 0$ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | $f' > 0$ | e | $f' < 0$

$x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ $f(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{e}}$ MINIMO

$x = e$ $f(x) = -e$ MASSIMO



3) $f(x) = x e^{-x} \sin x - x^2 \sim -x^2$, $x \to +\infty$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx$ CONVERGE

$g(x) = e^{-x} \sin x - x \sim (1 - x)x - x = -x^2$, $x \to 0$

$\int_0^1 \frac{1}{g(x)} dx$ DIVERGE

4) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda + \cancel{3} + 2\lambda - \cancel{3} + 2(-6 + 3) = \lambda - 6 \neq 0 \text{ per } \lambda \neq 6$$

Per $\lambda = 2$ $\det(\ ) = -4$

$$\text{Inversa} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$