Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009

Matematica 1
Appello del 9 gennaio 2009

Nome:................................
N. matr.:................................

Ancona, 9 gennaio 2009

Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome, ed eventualmente numero di matricola, va conseganto assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e **Domande teoriche**, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio di ciascun gruppo di domande.

Domande elementari.

1. (2 punti) Risolvere l'equazione trigonometrica
$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$
nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

2. (2 punti) Risolvere la disequazione
$$\frac{x + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} > 0.$$

Domande teoriche.

1. *(i)* (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per una funzione reale di variabile reale;

   (ii) (3 punti) Si discuta l'applicabilità del teorema alla funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1, & -\pi \le x \le 0 \\ \sin x + 1 & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

2. *(i)* (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del confronto per il limite delle successioni di numeri reali.

   (ii) (3 punti) Utilizzando opportunamente il teorema del confronto, dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sin n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Esercizi.

1. (4 punti) Calcolare la media della funzione

$$f(x) = \frac{3\,x+1}{1-x^2}$$

   nell'intervallo $[2, 3]$.

2. (4 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x}+3}{e^x - 1}.$$

3. (3 punti) Tra le seguenti applicazioni, f_1, f_2, f_3: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, quale è lineare?

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= (x - y + 1, 3x) \\ f_2(x, y, z) &= (x + y - z, 2x - 3y + z) \\ f_3(x, y, z) &= (x^2 + z^2, y^2 + z^2) \end{aligned}$$

   Per l'applicazione lineare, determinare la matrice di rappresentazione usando (a) le basi canoniche in $\mathbb{R}^3$ ed in $\mathbb{R}^2$ e (b) la base $\{(0, 1, 1), (1, 1, -1), (-1, -1, 0)\}$ in $\mathbb{R}^3$ e la base canonica in $\mathbb{R}^2$.

4. (3 punti) Stabilire la convergenza degli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx$$

   dove $f(x) = x\,e^{-x} \sin x - x^2$.

2) $f(x)=\dfrac{e^{2x}+3}{e^x-1}$ DOMINIO $x\neq 0$

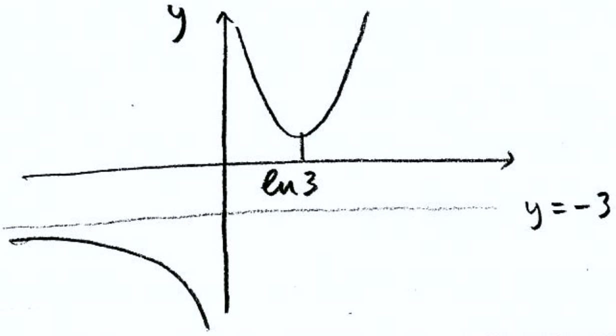
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3 \to y=-3$ ASINT. OR.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$

$f'(x)=0$ per $x=\ln 3$ che è un MINIMO

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^x-1)-e^x(e^{2x}+3)}{(e^x-1)^2}=e^x\,\frac{e^{2x}-2e^x-3}{(e^x-1)^2}$$

$f(\ln 3)=6$



3) Solo f_2 è lineare

$f_2(x,y,z)=(x+y-z,\ 2x-3y+z)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

Se $e_1=(0,1,1)$, $e_2=(1,1,-1)$, $e_3=(-1,-1,0)$

$f_2(0,1,1)=(0,-2)$

$f_2(1,1,-1)=(3,-2)$

$f_2(-1,-1,0)=(-2,1)$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

4) $f(x)=xe^{-x}\sin x-x^2$

$f(x)\sim -x^2,\ x\to+\infty$

$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx$ DIVERGE

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,dx$ CONVERGE

$$f(x)\sim x\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-x^2=$$

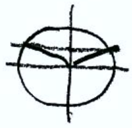
$$=x\left(x-\frac{x^3}{6}-x^2+\frac{x^4}{6}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}\right)-x^2=$$

$$=x\left[x-x^2+\dots\right]-x^2=-x^3,\ x\to 0$$

DOMANDE ELEMENTARI

1) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ $\quad \sin x = t \quad$ $2t^2 + t - 1 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ 1/2 \end{cases}$$



$x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

2) $\frac{x + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} > 0$ $\quad \begin{cases} x + \sqrt{x} - 2 > 0 \\ \sqrt{x} - 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x + \sqrt{x} - 2 < 0 \\ \sqrt{x} - 2 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$ $\quad t = \sqrt{x} > 0$

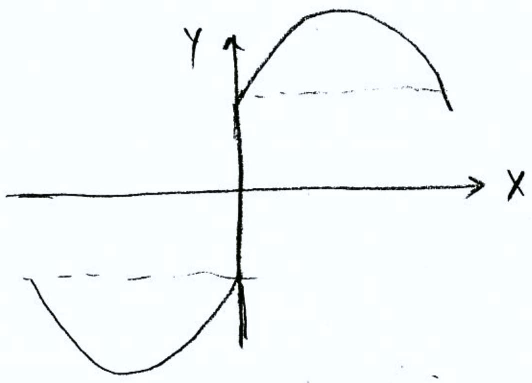
$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2 \;\; 4} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$\begin{cases} t > 1 \\ t > 2 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \le t < 1 \\ 0 \le t < 2 \end{cases}$ $\quad \{t > 2\} \cup \{0 \le t <$

$\{x > 4\} \cup \{0 \le x < 1\}$

DOMANDE TEORICHE

1)



f(x) NON CONTINUA

TEOREMA NON APPLICABILE

2) $a_n = e^{-n} \sin n$ $\quad -e^{-n} \le a_n \le e^{-n}$ $\quad \begin{matrix} -e^{-n} \to 0 \\ e^{-n} \to 0 \end{matrix} \Rightarrow a_n \to 0$

$a_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n}$ $\quad -\frac{1}{n} \le a_n \le \frac{1}{n}$ $\quad \begin{matrix} -\frac{1}{n} \to 0 \\ \frac{1}{n} \to 0 \end{matrix} \Rightarrow a_n \to 0$

ESERCIZI

1) $f(x) = \frac{3x+1}{1-x^2}$

$$\int \frac{3x+1}{1-x^2}\,dx = 3\int \frac{x}{1-x^2}\,dx + \int \frac{dx}{1-x^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|1-x^2| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|1-x^2| + \frac{1}{2}\left\{\ln|1+x| - \ln|1-x|\right\}$$

$\langle f \rangle = \int_2^3 f(x)\,dx =$

$$= -\frac{3}{2}\left\{\ln 8 - \ln 3\right\} + \frac{1}{2}\left\{\ln 4 - \ln 3 - \ln 2\right\} = \left(-\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\right)\ln 2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\ln 3 = -4\ln 2 + \ln 3$$

$$= -\ln\frac{16}{3}$$