**Università Politecnica delle Marche**
**Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione**
**Anno Accademico 2008/2009**

**Matematica 1**
**Appello dell' 8 settembre 2009**

Nome:...............................
N. matr.:...............................                    Ancona, 8 settembre 2009

## Istruzioni.

- Il foglio con il testo, compilato con nome e cognome, ed eventualmente numero di matricola, va conseganto assieme alla bella copia. Non si consegnano brutte copie.
- I due gruppi di domande, intitolati **Domande elementari** e **Domande teoriche**, vanno scritti in ordine di comparsa sul foglio del testo e vanno scritti su un foglio diverso dal terzo gruppo di domande, **Esercizi**.
- Per l'ammissione all'orale, lo studente dovrà raggiungere un punteggio totale di almeno 16/30 e raccogliere almeno la metà del punteggio di ciascun gruppo di domande.

## Domande elementari.

1. *(2 punti)* Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y = 7 \\ x^2 + y^2 - 5x + 5y = 6 \end{cases}$$

2. *(2 punti)* Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = 1 \\ \ln x - \ln y = 2 \end{cases}$$

**Domande teoriche.**

1. *(i)* (3 punti) Sia $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, ..., n$ una matrice quadrata ad elementi reali. Enunciare e dimostrare il teorema sulla matrice inversa.

   *(ii)* (3 punti) Senza calcolarne il determinante, ma utilizzando soltanto le sue proprietà, determinare se la matrice

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   ammette inversa e giustificare la risposta.

2. *(i) (3 punti)* Discutere i punti di non derivabilità di una funzione continua: cuspidi, punti angolosi e punti a tangente verticale. Dire inoltre quando una funzione è prolungabile per continuità in un punto $x_0$.

   *(ii) (3 punti)* Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sin\, x}{1 + e^x}$$

   e se ne determini il dominio, gli eventuali punti di non derivabilità ed i possibili prolungamenti per continuità.

**Esercizi.**

1. *(4 punti)* Calcolare (in modo esplicito) l'integrale

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{(\sin\, x - 1)\cos\, x}{2\sin^2\, x + \sin\, x - 1}\, dx$$

2. *(4 punti)* Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 3\, e^x + 2}{e^{2x} - 2\, e^x - 3}.$$

3. (3 punti) Calcolare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$x^6 - 5\, x^4 - 36\, x^2 = 0$$

   con la loro molteplicità, rappresentarle graficamente sul piano complesso e determinarne il modulo e l'argomento..

4. (3 punti) Utilizzando il criterio del confronto ed il criterio del confronto asintotico, stabilire le proprietà di convergenza degli integrali impropri

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin\, x|}{1 + e^x}\, dx \qquad \int_{-\infty}^0 \frac{\sin\, x}{1 + e^x}\, dx.$$

## DOMANDE ELEMENTARI

① $\begin{cases} x^2+y^2-5x+6y=7 \\ x^2+y^2-5x+5y=6 \end{cases}$

$/ \quad / \quad / \quad y=1$

$x^2+\cancel{1}-5x+\cancel{6}=\cancel{7}$

$x(x-5)=0 \qquad x_1=0 \qquad x_2=5$

Sol. $(0,1) \quad (5,1)$

② $\begin{cases} \ln x+\ln y=1 \\ \ln x-\ln y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ln x=\frac{3}{2} \\ \ln y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$x=e^{3/2}=\sqrt{e^3}$

$y=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

## DOMANDE TEORICHE

① (ii) La matrice ha determinante nullo, poiché

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1-3 & 0+1 & 1+2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$=0+0$

② (ii) $f(x)=\frac{\sin x}{1-e^x} \qquad D: \ e^x \neq 1 \quad x\neq 0$

Ma $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\frac{x}{1-e^x}=1$

$f(x)$ prolungabile per cont. in $x=0$ assegnando $f(0)=1$

$f'(x)=\frac{\cos x(1-e^x)+e^x\sin x}{(1-e^x)^2} \qquad \lim_{x\to 0} f'(x)=+\infty$ infatti

$n(x)=\cos x(1-e^x)+e^x\sin x \approx \left(1-\frac{x^2}{2!}\right)\left(-x-\frac{x^2}{2!}\right)+\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)=$

$=-\cancel{x}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\ldots+\cancel{x}+x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+\ldots=\frac{x^2}{2}+O(x^3)$

$n(x)>0 \quad d(x)>0$ per $x\approx 0$

$x=0$ cuspide verticale

ESERCIZI

(1) $$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{(\sin x-1)\cos x}{2\sin^2 x+\sin x-1}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{(\sin x-1)\cos x\,dx}{2\sin^2 x+\sin x-1} + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (\text{idem}) =$$

$$= \int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{(t-1)\,dt}{2t^2+t-1} + \int_{1}^{\sqrt{3}/2} \frac{(t-1)\,dt}{2t^2+t-1} = 0$$

$$2t^2+t-1=0 \qquad t_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{t-1}{2t^2+t-1}\,dt = \int \frac{t-1}{2(t-\frac{1}{2})(t+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{A(t-\frac{1}{2})+B(t+1)}{(t-\frac{1}{2})(t+1)}\,dt = \frac{1}{2}\left\{A\ln|t+1| + B\ln\left|t-\frac{1}{2}\right|\right\}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -\frac{1}{2}A+B=-1 \end{cases} \qquad \frac{3}{2}A=2 \qquad A=\frac{4}{3} \qquad B=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$$

Alla fine $\int = 0$

(3) $$x^6-5x^4-36x^2=0 \qquad x^2\left[x^4-5x^2-36\right]=0 \qquad x^2=0$$

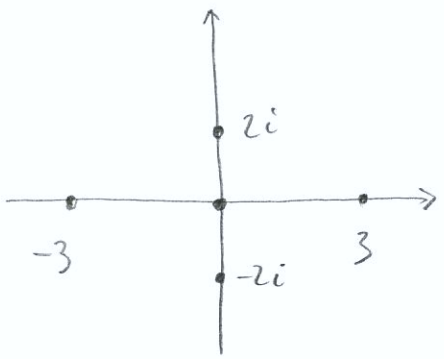
$x_1=0$ molt. 2

$$x^4-5x^2-36=0$$

$$x^2_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25+144}}{2} = \frac{5\pm 13}{2} = \begin{cases} -4 \\ 9 \end{cases}$$

$x^2=-4 \quad x=\pm 2i$

$x^2=9 \quad x=\pm 3$




$x=3 \quad \rho=3 \quad \theta=0 \quad m=1$

$x=-3 \quad \rho=3 \quad \theta=\pi \quad$ "

$x=2i \quad \rho=2 \quad \theta=\pi/2 \quad$ "

$x=-2i \quad \rho=2 \quad \theta=-\pi/2 \quad$ "

$x=0 \quad \rho=0 \quad \theta$ N.D. $\quad m=2$

(4) $$\frac{|\sin x|}{1+e^x} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x} \implies \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{1+e^x}\,dx \text{ converge}$$

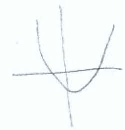
$$\frac{\sin x}{1+e^x} \sim \sin x, \; x\to-\infty \implies \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{1+e^x}\,dx \text{ non converge}$$

(2) $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 3e^{x} + 2}{e^{2x} - 2e^{x} - 3}$

Dominio : $e^{2x} - 2e^{x} - 3 \neq 0$ $\quad e^{x} = t$

$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} -1 & \text{da scartare} \\ 3 \end{cases}$

$e^{x} \neq 3 \qquad x \neq \ln 3 \approx 1{,}1$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{2}{3}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$f'(x) = e^{x} \dfrac{(e^{2x} - 10e^{x} + 13)}{(e^{2x} - 2e^{x} - 3)^{2}}$

$\lim_{x \to (\ln 3)^-} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 0$ per $(e^{x} = t)$ $\quad t^{2} - 10t + 13 = 0$

$\lim_{x \to (\ln 3)^+} f(x) = +\infty$

$t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-13} = 5 \pm \sqrt{12} =$

$= 5 \pm 2\sqrt{3} \approx \begin{cases} 0.43 \\ 2.14 \end{cases}$

$f(0) = 0$

$f(x) = 0$ per $t^{2} - 3t + 2 = 0 \qquad t_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 0 \\ x = \ln 2 \approx 0.7 \end{matrix}$