Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2006/2007

Matematica 1
Appello del 20 aprile 2007

Nome:...............................
N. matr.:............................... Ancona, 20 aprile 2007

Domande elementari.

1. Risolvere la disequazione
$$x \ln x < 0.$$
2. Risolvere l'equazione
$$4 \cos^4 x - 9 \cos^2 x + 2 = 0.$$

Domande teoriche.

1. *(i)* Enunciare e dimostrare il teorema del valor medio di Lagrange.
   (ii) Sia $f(x)$ una funzione simmetrica e derivabile definita nell'intervallo $[-1, 1]$. Utilizzando il teorema del valor medio di Lagrange, dimostrare che la funzione $f'(x)$ ha almeno uno zero nell'intervallo $(-1, 1)$. (*Facoltativo:*) Si può dimostrare che $f'(0) = 0$?
2. Sia $\{a_n\}$ una successione infinitesima. Sotto quali condizioni la successione degli inversi, $\{b_n\} = \{1/a_n\}$, è regolare e tende all'infinito? Dimostrare l'affermazione.

Soluzioni - Domande elementari.

1. Le soluzioni sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x < 0 \end{cases}$$

vale a dire $0 < x < 1$.

2. Poniamo $y = \cos^2 x$. Deve essere $0 \le y \le 1$. L'equazione diventa

$$4\,y^2 - 9\,y + 2 = 0$$

le cui soluzioni sono $y_1 = 1/4$ ed $y_2 = 2$ (che scartiamo). Ritornando ad x,

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}$$
$$\cos x = \pm\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{3},\ \frac{2\,\pi}{3},\ \frac{4\,\pi}{3},\ \frac{5\,\pi}{3}$$

Soluzioni - Domande teoriche.

1. Si consideri un punto $x_0 \in (0,1)$. Abbiamo $f(x_0) - f(-x_0) = 0$ e quindi deve esistere un punto c, interno all'intervallo $[-x_0, x_0] \in [-1,1]$ tale che $f'(c) = 0$. Per dimostrare che $f'(0) = 0$, basta pensare che il punto x_0 può essere scelto arbitrariamente piccolo, $x_0 = \varepsilon$. Allora, per il teorema di Lagrange, il punto c deve essere interno all'intervallo $[-\varepsilon, \varepsilon]$; per l'arbitrarietà di ε, ciò è possibile solo se $c = 0$.

2. La successione degli inversi tende all'infinito se e solo se i termini della successione $\{a_n\}$ sono definitivamente positivi o definitivamente negativi. Se non fosse così, i termini di $\{b_n\}$ diventerebbero sempre più grandi in valore assoluto, ma alternando i segni e la successione sarebbe irregolare. Se, per esempio, $a_n > 0$ definitivamente, abbiamo definitivamente che $0 < a_n < \varepsilon$, con ε arbitrario e dunque $b_n > 1/\varepsilon$ definitivamente, vale a dire

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

Esercizi.

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-(1-\cos x)}{x+(1-\cos x)}$$

2. Calcolare il seguente integrale
$$\int_{1/2}^{3} |x-2|\cdot|\ln x|\,dx$$

3. Studiare la funzione
$$f(x)=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x}.$$

4. Determinare le radici complesse dell'equazione di secondo grado
$$x^2+x+1=0.$$

   Calcolare quindi parte reale e parte immaginaria del loro prodotto e del loro rapporto e calcolarne il modulo e l'anomalia della loro rappresentazione polare.

Soluzioni - Esercizi.

1. Applicando il teorema di de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-(1-\cos x)}{x+(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 1$$

2. L'argomento del valore assoluto si annulla per $x=1$ ed $x=2$. Dunque:

$$\int_{1/2}^{3} |x-2|\cdot|\ln x|\,dx =$$
$$\int_{1/2}^{1} |x-2|\cdot|\ln x|\,dx + \int_{1}^{2} |x-2|\cdot|\ln x|\,dx + \int_{2}^{3} |x-2|\cdot|\ln x|\,dx$$
$$= \int_{1/2}^{1} (x-2)\,\ln x\,dx - \int_{1}^{2} (x-2)\,\ln x\,dx + \int_{2}^{3} (x-2)\,\ln x\,dx$$

Calcoliamo la primitiva integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int (x-2)\,\ln x\,dx &= \frac{(x-2)^2}{2}\,\ln x - \int \frac{(x-2)^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[(x-2)^2\,\ln x - \frac{x^2}{2} + 2\,x - 4\,\ln x\right]\end{aligned}$$

Sostituendo nei tre contributi all'integrale:

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{3} |x-2|\cdot|\ln x|\,dx &= \left(\frac{13}{16} - \frac{7}{8}\,\ln 2\right) - \left(\frac{5}{4} - 2\,\ln 2\right) + \left(\frac{3}{4} + 2\,\ln 2 - \frac{3}{2}\,\ln 3\right) \\ &= \frac{5}{16} + \frac{25}{8}\,\ln 2 - \frac{3}{2}\,\ln 3\end{aligned}$$

3. Dominio: $x\in\mathbb{R}$ con $x\neq n\pi$, n intero qualsiasi. la funzione è periodica di periodo 2π e la studiamo in $[0,2\pi]$.
Limiti:

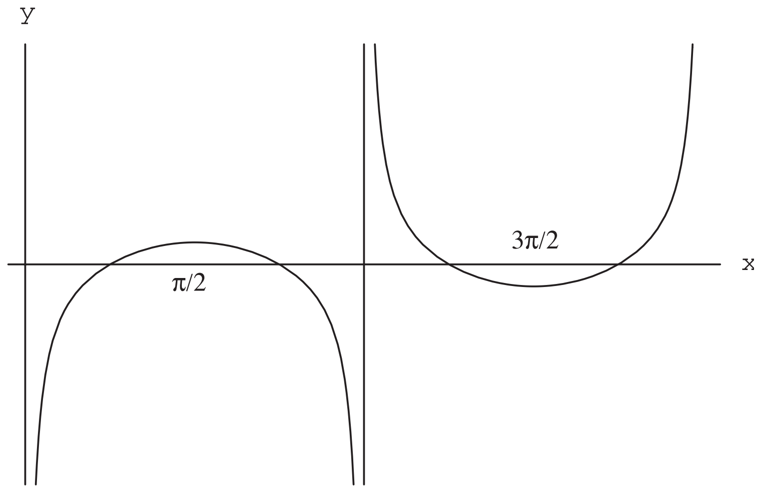
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to \pi^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to \pi^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x\to 2\,\pi^-} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

Dunque $x=0$, $x=\pi$ ed $x=2\pi$ sono asintoti verticali, e non ci sono asintoti orizzontali od obliqui.
Zeri: $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$, $(\sin x - \cos x)\,(\sin x + \cos x) = 0$, cioè $x = \pi/4$, $3\pi/4$, $5/pi/4$ e $7\pi/4$.
Derivata:

$$f'(x) = \cos x\,\left(3+\cot^2 x\right)$$

Punti stazionari:

$$\cos x = 0,$$
$$x_1 = \pi/2,\quad x_2 = 3\pi/2.$$



Considerando il segno della derivata prima, si vede che x_1 è un punto di massimo e x_2 un punto di minimo, con $f(x_1) = 1$ ed $f(x_2) = -1$.
Grafico:

4.

$$
\begin{aligned}
&z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\\
&z_1\, z_2 = 1\\
&\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\\
&\rho_1 = \rho_2 = 1\\
&\phi_1 = \frac{2\,\pi}{3},\ \ \phi_2 = \frac{4\,\pi}{3}
\end{aligned}
$$