Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2006/2007

Matematica 1
Appello del 20 aprile 2007

Nome:...............................
N. matr.:............................... Ancona, 20 aprile 2007

Domande elementari.

1. Risolvere la disequazione
$$|x|\,\ln|x| > 0.$$
2. Risolvere l'equazione
$$4\,\sin^4 x - 9\,\sin^2 x + 2 = 0.$$

Domande teoriche.

1. Determinare le equivalenze asintotiche delle funzioni
$$\begin{array}{ll} (i) & f(x) = x^2\,\sin(3/x^2) - 3 \\ (ii) & g(x) = \ln(1+3/x^2) - 3/x^2 \\ (iii) & h(x) = e^{2/x^2} - 1 \\ (iv) & u(x) = \sqrt{1+2/x^2} - 1/x^2 - 1 \end{array}$$
per $x \to -\infty$. Verificare infine se il risultato trovato vale anche nel limite $x \to +\infty$.
2. *(i)* Dare la definizione di cuspide, punto angoloso e punto a tangente vericale per una funzione reale di una variabile reale.
   (ii) Classificare il punto $x = 0$ per le seguenti funzioni:
$$f(x) = |\sin x|,\;\; g(x) = \sqrt{|x|},\;\; h(x) = \mathrm{sgn}(x)\,\sqrt{|x|},$$
$$u(x) = \frac{\sin x}{x},\;\; w(x) = \frac{\sin x}{|x|}.$$
   Specificare inoltre se sono continue in $x = 0$ e, in caso contrario, se sono prolungabili per continuità. Con la notazione $\mathrm{sgn}(x)$ si indica il segno di x.

Soluzioni - Domande elementari.

1. Siccome $|x| > 0$ è sempre vera, le soluzioni sono date da $\ln|x| > 0$, vale a dire $x < -1$ ed $x > 1$.

2. Poniamo $y = \sin^2 x$. Deve essere $0 \leq y \leq 1$. L'equazione diventa

$$4\,y^2 - 9\,y + 2 = 0$$

le cui soluzioni sono $y_1 = 1/4$ ed $y_2 = 2$ (che scartiamo). Ritornando ad x,

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{4} \\ \sin x &= \pm\frac{1}{2} \\ x &= \frac{\pi}{6},\ \ \frac{5\,\pi}{6},\ \ \frac{7\,\pi}{6},\ \ \frac{11\,\pi}{6} \end{aligned}$$

Soluzioni - Domande teoriche.

1. In tutte le funzioni operiamo il cambiamento di variabile $y = 1/x^2$, con il quale i limiti $x \to \pm\infty$ diventano $y \to 0^+$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\,\sin(3/x^2) - 3 = \frac{\sin 3y}{y} - 3 \sim \frac{3y - (3y)^3/3!}{y} - 3 = -\frac{9}{2}\,y^2 = -\frac{9}{2x^4} \\ g(x) &= \ln(1 + 3/x^2) - 3/x^2 = \ln(1 + 3\,y) - 3\,y \sim 3\,y - \frac{(3\,y)^2}{2} - 3\,y = \frac{9}{2}\,y^2 = \frac{9}{2x^4} \\ h(x) &= e^{2/x^2} - 1 = e^{2y} - 1 \sim 1 + 2\,y - 1 = 2\,y = \frac{2}{x^2} \\ u(x) &= \sqrt{1 + 2/x^2} - 1/x^2 - 1 = \sqrt{1 + 2y} - y - 1 \sim 1 + y - \frac{(2y)^2}{8} - y - 1 \\ &= \frac{1}{2}\,y^2 = \frac{1}{2\,x^4}. \end{aligned}$$

Sono tutte funzioni pari in x, dunque si comportano allo stesso modo nei limiti $x \to \pm\infty$.

2. Il punto $x = 0$ è un punto angoloso per $f(x)$, una cuspide per $g(x)$ ed un flesso a tangente verticale per $h(x)$, che sono tutte continue in $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= -\cos(0) = -1,\ \ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \cos(0) = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} g'(x) &= \lim_{x\to 0^-} (-)\,\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty,\ \ \lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} h'(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2\sqrt{-x}} = +\infty,\ \ \lim_{x\to 0^+} h'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \end{aligned}$$

Per $u(x)$ e $w(x)$ il punto $x = 0$ non sta nel dominio, quindi la questione della continuità non ha senso; $u(x)$ è prolungabile per continuità, $w(x)$ invece no:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} u(x) = \lim_{x\to 0^+} u(x) = 1 \\ &\lim_{x\to 0^-} w(x) = -1 \neq \lim_{x\to 0^+} w(x) = 1 \end{aligned}$$

Esercizi.

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x^2}{\sin x - x^2}$$

2. Calcolare il seguente integrale
$$\int_0^{2\pi} \frac{|\cos x|}{2+\sin x}\, dx$$

3. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{(\ln x + 1)\,(\ln x - 2)}{\ln x - 3}.$$

4. Determinare le radici complesse dell'equazione di secondo grado
$$2\,x^2 - 2\,x + 1 = 0.$$

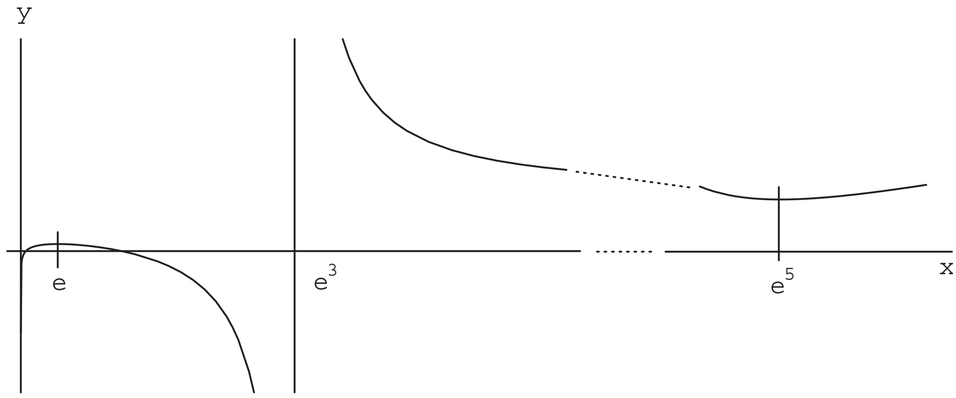
   Calcolare quindi parte reale e parte immaginaria del loro prodotto e del loro rapporto e calcolarne il modulo e l'anomalia della loro rappresentazione polare.

Soluzioni - Esercizi.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x^2}{\sin x - x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x + x^2)/x}{(\sin x - x^2)/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x}{1-x} = 1$$

2. L'argomento del valore assoluto si annulla per $x = \pi/2$ ed $x = 3\pi/2$. Dunque:
$$\int_0^{2\pi}\frac{|\cos x|}{2+\sin x}\,dx =$$
$$\int_0^{\pi/2}\frac{|\cos x|}{2+\sin x}\,dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{|\cos x|}{2+\sin x}\,dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{|\cos x|}{2+\sin x}\,dx$$
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$$
Calcoliamo la primitiva:
$$\int\frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx = \ln(2+\sin x)$$
Sostituendo nei tre contributi all'integrale:
$$\int_0^{2\pi}\frac{|\cos x|}{2+\sin x}\,dx = (\ln 3 - \ln 2) + \ln 3 + \ln 2 = 2\,\ln 3$$

3. Dominio: $x > 0$ ed $x \neq e^3$.
Limiti:
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty\\
&\lim_{x\to (e^3)^-} f(x) = -\infty\\
&\lim_{x\to (e^3)^+} f(x) = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = 0
\end{aligned}$$
Dunque c'è solo un asintoto verticale in $x = e^3$ e non ci sono asintoti orizzontali od obliqui.
Zeri: $(\ln x + 1)(\ln x - 2) = 0$, cioè $x = 1/e$ ed $x = e^2$.
Derivata:
$$f'(x) = \frac{\ln^2 x - 6\,\ln x + 5}{x\,(\ln^2 x - 3)}$$
Punti stazionari:
$$\begin{aligned}
&\ln^2 x - 6\,\ln x + 5 = 0,\ \ \ln x \to y\\
&y^2 - 6y + 5 = 0\\
&y_1 = 1,\ \ y_2 = 5\\
&x_1 = e,\ \ x_2 = e^5.
\end{aligned}$$
Considerando il segno della derivata prima, si vede che x_1 è un punto di massimo e x_2 un punto di minimo, con $f(x_1) = 1$ ed $f(x_2) = 9$.
Grafico:



4.

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{2} = \frac{1 \pm i}{2}$$
$$z_1\, z_2 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = i$$
$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\phi_1 = \frac{\pi}{4}, \;\; \phi_2 = -\frac{\pi}{4}$$