Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2006/2007

Matematica 1
Appello del 20 aprile 2007

Nome:................................
N. matr.:................................ Ancona, 20 aprile 2007

Domande elementari.

1. Risolvere la disequazione
$$|x| \ln x < 0.$$

2. Risolvere l'equazione
$$4 \cos^4 x + 3 \cos^2 x - 1 = 0.$$

Domande teoriche.

1. Dimostrare con metodi geometrici elementari che
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{x - \pi/2} = 1.$$
Utilizzando questi risultati, dimostrare quindi che
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cot x}{x - \pi/2} = 1$$

2. Siano $\{a_n\}$ una successione limitata e $\{b_n\}$ una successione infinitesima. Dimostrare che il loro prodotto è una successione convergente e che $\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n = 0$. Utilizzare quindi questo risultato per calcolare il limite
$$\lim_{n \to \infty} (\sin^2 n) \left(\sin \frac{1}{n} \right).$$

Soluzioni - Domande elementari.

1. Il logaritmo non è definito per $x < 0$, quindi il valore assoluto è superfluo. Le soluzioni sono semplicemente $\ln x < 0$, ovvero $0 < x < 1$.

2. Poniamo $y = \cos^2 x$. Deve essere $0 \leq y \leq 1$. L'equazione diventa

$$4\,y^2 + 3\,y - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono $y_1 = -1$ (che scartiamo) ed $y_2 = 1/4$. Ritornando ad x,

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{4} \\ \cos x &= \pm\frac{1}{2} \\ x &= \frac{\pi}{3},\ \frac{2\,\pi}{3},\ \frac{4\,\pi}{3},\ \frac{5\,\pi}{3} \end{aligned}$$

Soluzioni - Domande teoriche.

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\,\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x} = 1$$
$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cot x}{x - \pi/2} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{(x - \pi/2)\,\sin x} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{x - \pi/2}\,\frac{1}{\sin x} = 1$$

2. Siccome $\{a_n\}$ è limitata, esiste $M > 0$ tale che $|a_n| < M$ per ogni n; inoltre, siccome $\{b_n\}$ è infinitesima, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente $|b_n| < \varepsilon$. Abbiamo pertanto definitivamente $|a_n\,b_n| < M\,\varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε, segue che la successione $\{a_n\,b_n\}$ è infinitesima. La successione $\{\sin^2 n\}$ è limitata, in quanto $\sin^2 n \leq 1$ per ogni n, mentre $\{\sin(1/n)\}$ è infinitesima. Dunque la successione prodotto è infinitesima ed il limite richiesto è zero.

Esercizi.

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + x}{\sin^2 x - x}$$

2. Calcolare il seguente integrale
$$\int_{-1}^{2} (2x-1)\sqrt{|x^2-x|}\,dx$$

3. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-3}.$$

4. Determinare le radici complesse dell'equazione di secondo grado
$$x^2 - x + 1 = 0.$$
Calcolare quindi parte reale e parte immaginaria del loro prodotto e del loro rapporto e calcolarne il modulo e l'anomalia della loro rappresentazione polare.

Soluzioni - Esercizi.

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + x}{\sin^2 x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x + x)/x}{(\sin^2 x - x)/x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -1$$

2. L'argomento della radice si annulla per $x = 0$ ed $x = 1$. Dunque:

$$\int_{-1}^{2} (2x-1)\sqrt{|x^2-x|}\,dx =$$
$$\int_{-1}^{0} (2x-1)\sqrt{|x^2-x|}\,dx + \int_{0}^{1} (2x-1)\sqrt{|x^2-x|}\,dx + \int_{1}^{2} (2x-1)\sqrt{|x^2-x|}\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (2x-1)\sqrt{x^2-x}\,dx + \int_{0}^{1} (2x-1)\sqrt{x-x^2}\,dx + \int_{1}^{2} (2x-1)\sqrt{x^2-x}\,dx$$

Calcoliamo la primitiva integrando per parti:
$$\int (2x-1)\sqrt{x^2-x}\,dx = \frac{2}{3}\left(x^2-x\right)^{3/2}$$

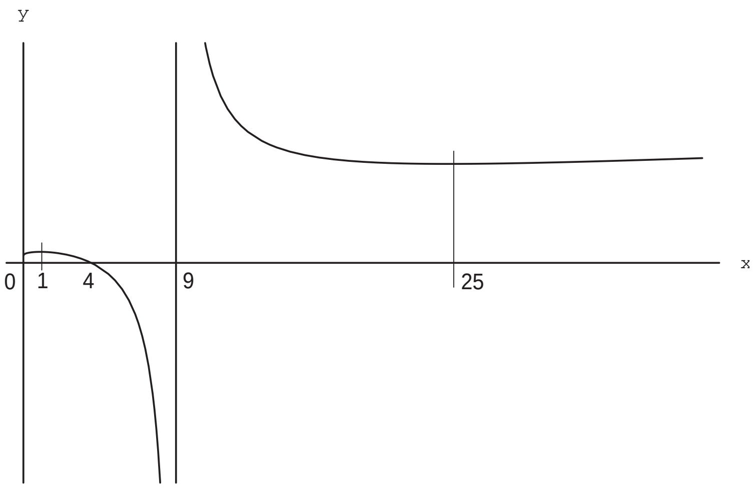
Sostituendo nei tre contributi all'integrale:
$$\int_{-1}^{2} (2x-1)\sqrt{|x^2-x|}\,dx = -2\sqrt{2} + 0 + 2\sqrt{2} = 0$$

3. Dominio: $x \geq 0$ ed $x \neq 9$.
Limiti:
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to 9^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 9^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Dunque c'è solo un asintoto verticale in $x = 9$ e non ci sono asintoti orizzontali od obliqui.
Zeri: $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) = 0$, cioè $x = 4$.
Derivata:
$$f'(x) = \frac{x - 6\sqrt{x} + 5}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-3)^2}$$

Punti stazionari:
$$x - 6\sqrt{x} + 5 = 0, \quad \sqrt{x} \to y$$
$$y^2 - 6y + 5 = 0$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = 5$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 25.$$

Considerando il segno della derivata prima, si vede che x_1 è un punto di massimo e x_2 un punto di minimo, con $f(x_1) = 1$ ed $f(x_2) = 9$.
Grafico:



4.

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\,\sqrt{3}}{2}$$
$$z_1\,z_2 = 1$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 + i\,\sqrt{3}}{2}$$
$$\rho_1 = \rho_2 = 1$$
$$\phi_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \phi_2 = -\frac{\pi}{3}$$