Università Politecnica delle Marche
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2006/2007

Matematica 1
Appello del 20 aprile 2007

Nome:...............................
N. matr.:............................... Ancona, 20 aprile 2007

Domande elementari.

1. Risolvere la disequazione
$$x \ln |x| > 0.$$
2. Risolvere l'equazione
$$4 \sin^4 x + 3 \sin^2 x - 1 = 0.$$

Domande teoriche.

1. *(i)* Enunciare e dimostrare il teorema della media del calcolo integrale.

   (ii) Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-1, 0] \\ x-1 & x \in (0, 1] \end{cases}$$
   Calcolarne il valor medio e discutere l'applicabilità del teorema della media dimostrato sopra.

2. *(i)* Enunciare e dimostrare il teorema di monotonia per le funzioni derivabili.

   (ii) Sia $f : D \to \mathbb{R}$, con $D = [-1, 0] \cup [1, 2]$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-1, 0] \\ x-1 & x \in [1, 2] \end{cases}$$
   Discutere l'applicabilità del teorema di monotonia sopra dimostrato.

Soluzioni - Domande elementari.

1. Le soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ \ln(-x) < 0 \end{cases} \qquad \text{vale a dire } x > 1 \text{ e } -1 < x < 0.$$

2. Poniamo $y = \sin^2 x$. Deve essere $0 \le y \le 1$. L'equazione diventa

$$4\,y^2 + 3\,y - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono $y_1 = -1$ (che scartiamo) ed $y_2 = 1/4$. Ritornando ad x,

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{4} \\ \sin x &= \pm\frac{1}{2} \\ x &= \frac{\pi}{6},\ \frac{5\,\pi}{6},\ \frac{7\,\pi}{6},\ \frac{11\,\pi}{6} \end{aligned}$$

Soluzioni - Domande teoriche.

1. La funzione presenta una discontinuità per $x = 0$. Il valor medio è

$$\begin{aligned} < f > &= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} (x+1)\,dx + \int_{0}^{1} (x-1)\,dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

A causa della discontinuità, il teorema della media non è applicabile e non c'è alcun valore interno all'intervallo dove essa assume il suo valor medio.

2. La funzione è definita sull'unione di intervalli disgiunti; il teorema di monotonia si applica ad un dominio fatto da un singolo intervallo e quindi, pur essendo la derivata sempre positiva, la funzione non è crescente.

Esercizi.

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} - x}$$

2. Calcolare il seguente integrale
$$\int_{-1}^{2} |(x-1)(e^x - 1)| \; dx$$

3. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{(e^x + 1)(e^x - 2)}{e^x - 3}.$$

4. Determinare le radici complesse dell'equazione di secondo grado
$$x^2 - 3\,x + 3 = 0.$$

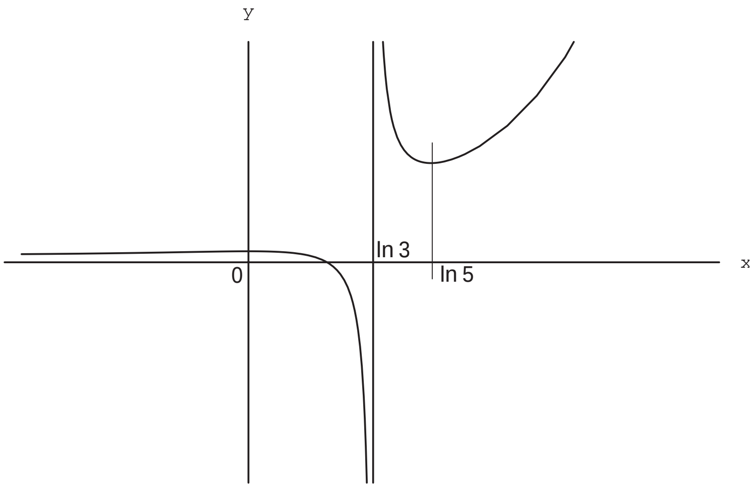
   Calcolare quindi parte reale e parte immaginaria del loro prodotto e del loro rapporto e calcolarne il modulo e l'anomalia della loro rappresentazione polare.

Soluzioni - Esercizi.

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x}+x)/\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-x)/\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=1$$

2. La funzione integranda si annulla per $x=0$ ed $x=1$. Dunque:
$$\int_{-1}^{2}|(x-1)\,(e^x-1)|\;dx=$$
$$\int_{-1}^{0}|(x-1)\,(e^x-1)|\;dx+\int_{0}^{1}|(x-1)\,(e^x-1)|\;dx+\int_{1}^{2}|(x-1)\,(e^x-1)|\;dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x-1)\,(e^x-1)\,dx-\int_{0}^{1}(x-1)\,(e^x-1)\,dx+\int_{1}^{2}|(x-1)\,(e^x-1)|\;dx$$
Calcoliamo la primitiva integrando per parti:
$$\int(x-1)\,(e^x-1)\,dx=(x-1)\,(e^x-x)-\int(e^x-x)\,dx=(x-1)\,(e^x-x)-e^x+\frac{x^2}{2}$$
Sostituendo nei tre contributi all'integrale:
$$\int_{-1}^{2}|(x-1)\,(e^x-1)|\;dx=2\,e+\frac{3}{e}-\frac{7}{2}$$

3. Dominio: $e^x-3\neq 0$, cioè $x\neq\ln 3$.
Limiti:
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to\ln 3^-}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to\ln 3^+}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$
Dunque $x=2/3$ è asintoto orizzontale ed $y=\ln 3$ è asintoto verticale e non ci sono asintoti obliqui.
Zeri: $(e^x+1)\,(e^x-2)=0$, cioè $x=\ln 2$.
Derivata:
$$f'(x)=\frac{[e^x(e^x-2)+(e^x+1)e^x](e^x-3)-e^x[(e^x+1)\,(e^x-2)]}{(e^x-3)^2}=\frac{e^x(e^{2x}-6\,e^x+5)}{(e^x-3)^2}$$
Punti stazionari:
$$e^{2x}-6\,e^x+5=0,\;\; e^x\to y$$
$$y^2-6y+5=0$$
$$y_1=1,\;\; y_2=5$$
$$x_1=0,\;\; x_2=\ln 5.$$
Considerando il segno della derivata prima, si vede che x_1 è un punto di massimo e x_2 un punto di minimo, con $f(x_1)=1$ ed $f(x_2)=9$.
Grafico:



4.

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{3 \pm i\,\sqrt{3}}{2}$$
$$z_1\, z_2 = 3$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i\,\sqrt{3}}{2}$$
$$\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{3}$$
$$\phi_1 = \frac{\pi}{6},\ \ \phi_2 = -\frac{\pi}{6}$$