

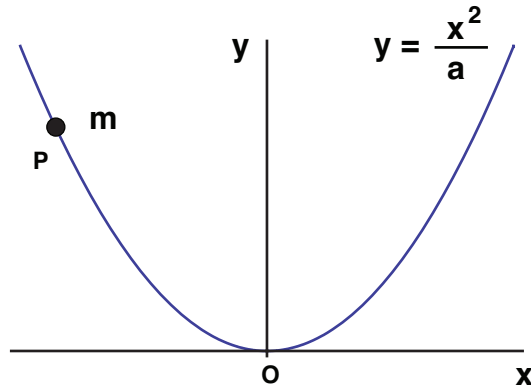
**Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica**  
**Anno Accademico 2012/2013**  
**Meccanica Razionale**

Nome .....

N. Matricola .....

Ancona, 14 settembre 2013

1. Un punto  $P$  di massa  $m$  si muove lungo una guida parabolica di equazione  $y = x^2/a$  sul piano verticale  $O(x, y)$ , con velocità costante  $u$  lungo  $x$ ,  $\dot{x} = u$ . Esprimere il modulo della velocità in funzione di  $x$  e calcolare tale velocità quando  $P$  passa per l'origine.



**Soluzione.**

Equazione della traiettoria:  $y = \frac{x^2}{a}$

Vettore velocità:  $\mathbf{v} = \dot{x} \hat{\mathbf{i}} + \dot{y} \hat{\mathbf{j}}$

Ma  $\dot{x} = u$  e  $\dot{y} = \frac{2x}{a} \dot{x} = \frac{2x}{a} u$

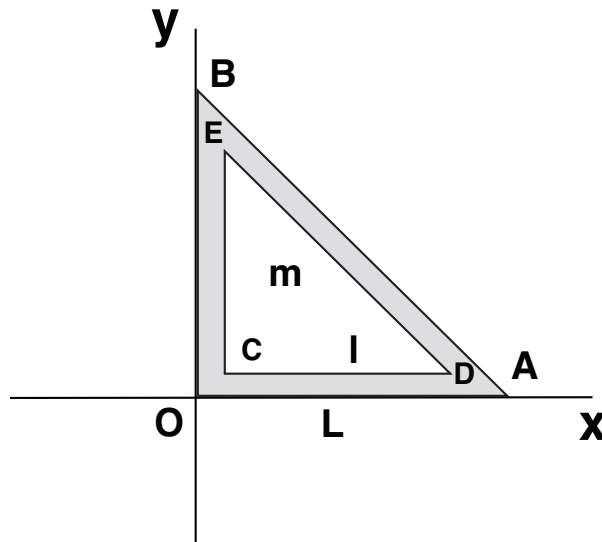
Modulo al quadrato della velocità:  $v^2 = |\mathbf{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = u^2 \left( 1 + \frac{4x^2}{a^2} \right)$

Nell'origine  $x = 0$  e quindi:  $v(O) = u$

2. Una cornice triangolare di massa  $m$  è costituita da un triangolo rettangolo isoscele  $OAB$  di cateto  $L$  privato di un triangolo rettangolo isoscele  $CDE$  di cateto  $l < L$ , con i lati paralleli al triangolo esterno e con i cateti  $CE$  e  $CD$  situati a distanza  $(L - l)/2$  dai cateti  $OB$  e  $OA$ . Determinare la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento  $O(x, y, z)$  indicato in figura (con l'asse  $z$  perpendicolare al piano della figura) e determinare le direzioni principali d'inerzia con origine in  $O$ .

**Soluzione.** La matrice d'inerzia si ottiene per differenza tra la matrice del triangolo pieno ed quella del buco triangolare:

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}_L - \mathbb{I}_l$$



con masse  $m_L$  ed  $m_l$  date da

$$\begin{aligned}
 m_L - m_l &= m \\
 \frac{m_L}{m_l} &= \frac{L^2}{l^2} \\
 m_L &= \frac{m L^2}{L^2 - l^2} \\
 m_l &= \frac{m l^2}{L^2 - l^2}
 \end{aligned}$$

Triangolo di cateto  $L$ :

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \sigma \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy y^2 = \sigma \int_0^L dx \frac{(L-x)^3}{3} \\
 &= \sigma \int_0^L dx \frac{x^3}{3} = \sigma \frac{L^4}{12} = \frac{1}{6} m_L L^2 \\
 I_{22} &= I_{11} = \frac{1}{6} m_L L^2 \quad (\text{per simmetria}) \\
 I_{12} &= \sigma \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy (-xy) = -\sigma \int_0^L x dx \int_0^{L-x} y dy \\
 &= -\sigma \int_0^L dx x \frac{(L-x)^2}{2} = -\sigma \int_0^L dx (L-x) \frac{x^2}{2} \\
 &= -\frac{\sigma}{2} \int_0^L dx (Lx^2 - x^3) = -\frac{\sigma}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) L^4 = -\frac{1}{12} m_L L^2
 \end{aligned}$$

Triangolo di cateto  $l$  rispetto ad un sistema con gli assi lungo i lati (per analogia con il caso precedente):

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \frac{1}{6} m_l l^2 \\
 I_{22} &= I_{11} = \frac{1}{6} m_l l^2 \\
 I_{12} &= -\frac{1}{12} m_l l^2
 \end{aligned}$$

Dobbiamo ora spostare gli elementi della matrice con il teorema di Huygens. Calcoliamo pertanto il centro di massa  $P_0$  del triangolo  $CDE$  nel sistema con gli assi lungo i lati.

$$x_0 = \frac{\sigma}{m_l} \int_0^l dx \int_0^{l-x} dy x = \frac{2}{l^2} \int_0^l dx x (l-x) = \frac{2}{l^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) l^3 = \frac{1}{3} l$$

$$y_0 = \frac{1}{3} l \quad (\text{per simmetria})$$

Quindi, nel sistema di riferimento della figura:

$$I_{11} = \frac{1}{6} m_l l^2 - m_l \frac{l^2}{9} + m_l \left( \frac{l}{3} + \frac{L-l}{2} \right)^2 = \frac{1}{18} m_l l^2 + m_l \left( \frac{L}{2} - \frac{l}{6} \right)^2$$

$$I_{22} = I_{11}$$

$$I_{12} = -\frac{1}{12} m_l l^2 + m_l \frac{l^2}{9} - m_l \left( \frac{L}{2} - \frac{l}{6} \right)^2 = \frac{1}{36} m_l l^2 - m_l \left( \frac{L}{2} - \frac{l}{6} \right)^2$$

Sottraendo otteniamo i valori per la figura:

$$I_{11} = \frac{1}{6} m_L L^2 - \frac{1}{18} m_l l^2 - m_l \left( \frac{L}{2} - \frac{l}{6} \right)^2$$

$$I_{22} = I_{11}$$

$$I_{12} = -\frac{1}{12} m_L L^2 - \frac{1}{36} m_l l^2 + m_l \left( \frac{L}{2} - \frac{l}{6} \right)^2$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = 2 I_{11}$$

3. Un sistema materiale, che si muove nel un piano verticale  $O(x, y)$ , è costituito da un punto  $P$  di massa  $m$ , libero di scorrere senza attrito su una guida rettilinea  $r$  priva di massa e passante per l'origine, a sua volta libera di ruotare attorno all'origine stessa. Un disco di raggio  $R$ , centro  $C$  e massa  $M$  è saldato sulla guida, con il centro  $C$  a distanza  $L$  dall'origine. Una molla di costante  $k > 0$  collega il punto  $P$  con l'origine  $O$  lungo la guida.

Dopo aver individuato il numero di gradi di libertà ed introdotto le coordinate lagrangiane, calcolare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità. Dopo aver risolto il problema per valori generici dei parametri, si consideri il caso  $m = 4M$  e  $kL = 2Mg$ .

**Soluzione.** I gradi di libertà sono due; siano  $s$  e  $\varphi$  le coordinate lagrangiane, con  $s$  la distanza di  $P$  da  $O$  (positiva quando  $P$  sta dalla parte opposta del cerchio) e  $\varphi$  l'angolo che la guida forma con l'asse  $x$ . L'energia potenziale è data da

$$V(s, \varphi) = (MgL - mgs) \sin \varphi + \frac{1}{2} k s^2$$

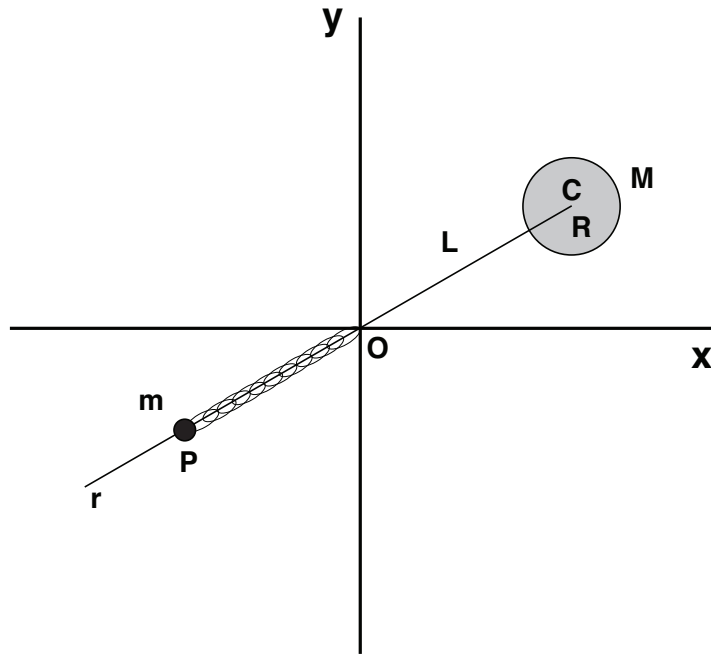
Calcoliamone le derivate:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = ks - mg \sin \varphi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = (MgL - mgs) \cos \varphi$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = k \quad \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial \varphi} = -mg \cos \varphi$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = (mgs - MgL) \sin \varphi$$



Configurazioni di equilibrio:

$$ks - mg \sin \varphi = 0$$

$$(MgL - mgs) \cos \varphi = 0$$

Dalla seconda equazione, o è 1)  $\cos \varphi = 0$  o è 2)  $MgL - mgs = 0$ .

$$1) \quad \cos \varphi = 0, \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow ks - mg = 0, \quad s = \frac{mg}{k}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow ks + mg = 0, \quad s = -\frac{mg}{k}$$

$$\Gamma_1 = \left( \frac{mg}{k}, \frac{\pi}{2} \right) \quad \Gamma_2 = \left( -\frac{mg}{k}, -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$2) \quad MgL - mgs = 0 \rightarrow s = \frac{ML}{m}$$

$$\sin \varphi = k \frac{ML}{m^2 g} \Rightarrow \varphi = \varphi_0, \pi - \varphi_0$$

$$\text{con} \quad \varphi_0 = \sin^{-1} \frac{MkL}{m^2 g}.$$

$$\Gamma_3 = \left( \frac{ML}{m}, \varphi_0 \right) \quad \Gamma_4 = \left( \frac{ML}{m}, \pi - \varphi_0 \right)$$

$\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  esistono a condizione che  $MkL/(m^2g) < 1$ .

Studio della stabilità. Matrice hessiana:

$$\begin{aligned}
H &= \begin{pmatrix} k & -mg \cos \varphi \\ -mg \cos \varphi & (mgs - MgL) \sin \varphi \end{pmatrix} \\
H(\Gamma_1) &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{m^2 g^2}{k} - MgL \end{pmatrix} \\
H(\Gamma_2) &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{m^2 g^2}{k} + MgL \end{pmatrix} \\
H(\Gamma_3) &= \begin{pmatrix} k & -mg \cos \varphi_0 \\ -mg \cos \varphi_0 & 0 \end{pmatrix} \\
H(\Gamma_4) &= \begin{pmatrix} k & mg \cos \varphi_0 \\ mg \cos \varphi_0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calcolando i determinanti, si vede che:

- $\Gamma_1$  è stabile se  $m^2 g^2 > M g k L$ ;
- $\Gamma_2$  è sempre stabile;
- $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  sono sempre instabili.

Se  $m = 4M$  e  $kL = 2Mg$ , allora  $m^2 g^2 = 16M^2 g^2$  e  $MgkL = 4M^2 g^2$ , quindi  $\Gamma_1$  è stabile; inoltre  $MkL/(m^2 g) = 1/8 < 1$  e  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  esistono.

4. Scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema dell'esercizio precedente.

**Soluzione.** Energia cinetica:  $T = T_P + T_{disco}$ .

$$\begin{aligned}
P - O &= s(-\hat{\mathbf{i}} \cos \varphi - \hat{\mathbf{j}} \sin \varphi) \\
\mathbf{v}_P &= \dot{s}(-\hat{\mathbf{i}} \cos \varphi - \hat{\mathbf{j}} \sin \varphi) + s \dot{\varphi}(\hat{\mathbf{i}} \sin \varphi - \hat{\mathbf{j}} \cos \varphi) \\
T_P &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_P^2 = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C - O &= L(\hat{\mathbf{i}} \cos \varphi + \hat{\mathbf{j}} \sin \varphi) \\
\mathbf{v}_C &= L \dot{\varphi}(-\hat{\mathbf{i}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{j}} \cos \varphi) \\
T_{disco} &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_C^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{M R^2}{2} \right) \dot{\varphi}^2 \\
&= \frac{1}{2} M \left( L^2 + \frac{R^2}{2} \right) \dot{\varphi}^2 \\
T &= \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \left[ m s^2 + M \left( L^2 + \frac{R^2}{2} \right) \right] \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \left[ m s^2 + M \left( L^2 + \frac{R^2}{2} \right) \right] \dot{\varphi}^2 - \left\{ (MgL - mgs) \sin \varphi + \frac{1}{2} k s^2 \right\}$$

Derivate della Lagrangiana:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} &= m \dot{s} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= m s \dot{\varphi}^2 + m g \sin \varphi - k s \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= \left[ m s^2 + M \left( L^2 + \frac{R^2}{2} \right) \right] \dot{\varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= (m g s - M g L) \cos \varphi\end{aligned}$$

Equazioni di Lagrange:

$$\begin{aligned}m \ddot{s} &= m s \dot{\varphi}^2 + m g \sin \varphi - k s \\ 2 m s \dot{s} \dot{\varphi} + \left[ m s^2 + M \left( L^2 + \frac{R^2}{2} \right) \right] \ddot{\varphi} &= (m g s - M g L) \cos \varphi\end{aligned}$$