CORSO di FISICA-MATEMATICA

per il

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2008/09: Appello del 8/9/2009

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 8 settembre 2009

1. (10 punti) È data l'equazione del calore con sorgente

$$\frac{\partial n}{\partial t} = K\,\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \alpha x$$

con le condizioni al contorno $\partial n/\partial x(0,t) = F$ e $\partial n/\partial x(L,t) = 2\,F$. Stabilire per quale valore di α esiste la soluzione stazionaria e determinare quindi la soluzione evolutiva con la condizione iniziale $n(x,0) = h(x)$.

2. (7 punti)

   (i) Enunciare e dimostrare il teorema di convoluzione per le trasformate di Fourier;

   (ii) siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni reali di variabile reale e siano $\widehat{f}(k)$ e $\widehat{g}(k)$ le loro trasformate di Fourier; dato $a \in \mathbb{R}$, utilizzando il tyeorema di convoluzione ed alcune delle proprietà delle trasformate di Fourier, calcolare la trasformata di Fourier della funzione $h(x) = f'(x)\,g(a\,x)$, con $a > 0$, ed applicare quindi il risultato ottenuto alla funzione $w(x) = e^{-x^2/2}\sin(2\,\pi\,x)$.

3. (8 punti) È data l'equazione evolutiva del prim'ordine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x^2\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$. Determinarne le curve caratteristiche e trovarne la soluzione $u(x,t)$ con la condizione iniziale $u(x,0) = h(x)$.

4. (9 punti) Classificare l'equazione del second'ordine

$$4\,\cos^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\sin x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e determinare le variabili canoniche nelle regioni di iperbolicità.

(1) $n(x,t) = n_s(x) + u(x,t)$ $\qquad$ n_s sol. stazionaria

$K n_s'' + \alpha x = 0$ $\quad$ con $\quad n_s'(0) = F \;,\; n_s'(L) = 2F$

$K n_s' + \alpha \frac{x^2}{2} = C_1 \qquad n_s'(0) = F \Rightarrow C_1 = KF \qquad n_s'(L) = 2F \Rightarrow C_1 = 2KF + \alpha \frac{L^2}{2}$

Deve essere $KF = 2KF + \frac{\alpha L^2}{2}$ $\quad$ cioè $\quad \alpha = -\frac{2KF}{L^2}$

$u(x,t)$ è la sol. di $\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ con condizioni al contorno omogenee

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-t/\tau_n} \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad \tau_n = \frac{L^2}{n^2 K \pi^2}$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L [h(x) - u_s(x)] \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

(2) (i) $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ $\qquad \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f_1(x) f_2(x) e^{-ikx} dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{-ikx} \frac{1}{2\pi} \iint dk' dk''\, \hat{f}_1(k') \hat{f}_2(k'') e^{i(k'+k'')x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint dk' dk''\, \hat{f}_1(k') \hat{f}_2(k'') \delta(k'+k''-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk'\, \hat{f}_1(k') \hat{f}_2(k-k') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}_1 * \hat{f}_2$$

(ii) $h(x) = f'(x) g(ax)$ $\qquad \mathcal{F}(f')(k) = \frac{1}{i} k \hat{f}(k)$

$$\mathcal{F}(g(ax))(k) = \frac{1}{a} \hat{g}\left(\frac{k}{a}\right) \qquad a > 0$$

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk' \frac{k'}{i} \hat{f}(k') \frac{1}{a} \hat{g}\left(\frac{k-k'}{a}\right) = \frac{1}{ai\sqrt{2\pi}} \int dk'\, \hat{f}(k') g\left(\frac{k-k'}{a}\right)$$

③ $\frac{\partial u}{\partial t} + x^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\quad \begin{cases} dt/dr = 1 \\ dx/dr = x^2 \\ dz/dr = 0 \end{cases}$ $\quad$ C.i. $\begin{cases} t=0 \\ x=s \\ z=h(s) \end{cases}$

$$\boxed{u(x,t) = h\left(\frac{x}{1+xt}\right)}$$

$$\begin{cases} t=r \\ \frac{dx}{x^2} = dr \end{cases} \quad \begin{cases} t=r \\ -\frac{1}{x} = r + c_1 \\ z = C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} t=r \\ C_1 = -\frac{1}{s} \\ C_2 = h(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=r \\ x = -\frac{1}{r+C_1} = -\frac{1}{r-1/s} = \frac{s}{1-rs} \\ z = h(s) \end{cases} \Rightarrow s = x(1-ts)$$

$$s(1+xt) = x$$

$$s = \frac{x}{1+xt}$$

④ $a = 4\cos^2 x \qquad b = \sin x \qquad c = \sin^2 x$

$b^2 - ac = \sin^2 x - 4\sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x\,(1 - 4\cos^2 x)$

Parabolica per $x = k\pi$ e quando $\cos x = \pm\frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

Iperbolica quando $1 - 4\cos^2 x > 0$ $\quad -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$ $\quad$ + multipli di 2π

Ellittica quando $1 - 4\cos^2 x < 0$ $\quad$ cioè $\underbrace{\left\{\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right\}}_{D_1} \cup \underbrace{\left\{\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}}_{D_2}$

$|\cos x| > \frac{1}{2}$ etc.

Trasf. canonica $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sin x \pm |\sin x|\sqrt{1-4\cos^2 x}}{4\cos^2 x} = \frac{\sin x}{4\cos^2 x}\left\{1 \pm \sqrt{1-4\cos^2 x}\right\}$

$$y = \int \frac{\sin x}{4\cos^2 x}\left\{1 \pm \sqrt{}\right\} dx + C_\pm$$

non si riesce ad andare oltre