

CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2007/08: Appello del 8/1/2008

Nome:.....

N. matr.:.....

Ancona, 8 gennaio 2008

1. (7 punti) È data l'equazione del prim'ordine

$$2y \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Determinarne le curve caratteristiche e trovarne la soluzione $u(x, y)$ con la condizione iniziale $u(0, y) = \cos y$. Determinare inoltre (graficamente ed analiticamente) il dominio di definizione della soluzione e tracciare il grafico della curva $u(x, y) = 1$.

2. (9 punti) Classificare l'equazione del second'ordine

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

al variare del parametro λ e determinarne la soluzione nel caso $\lambda = 2$ con la condizioni ausiliaria

$$u(x, 0) = e^{-x^2}$$

con $-\infty < x < +\infty$.

3. (7 punti) Per quali valori di λ e k la funzione $u(x, y) = e^{\lambda y} \sin kx + e^{\lambda x} \sin ky$ è soluzione dell'equazione di Laplace nel dominio $D = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$? Determinare, nel caso $k = 1$, i massimi ed i minimi della funzione nel dominio D .

4. (7 punti) Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni reali di variabile reale per le quali esistono le trasformate di Fourier $\hat{f}(k)$ e $\hat{g}(k)$ e la trasformata di Fourier $\hat{h}(k)$ del loro prodotto $h(x) = f(x)g(x)$. Enunciare il teorema di convoluzione che fornisce $\hat{h}(k)$ in termini di $\hat{f}(k)$ e $\hat{g}(k)$ ed applicarlo alle funzioni $f(x) = e^{-|x|}$ e $g(x) = \cos x$. Calcolare quindi direttamente la trasformata di Fourier $\hat{h}(k)$, verificando così l'uguaglianza dei due risultati.

5. (5 punti) Si consideri l'operatore

$$(\mathcal{L}\varphi)(x) = \begin{cases} -\varphi''(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ -\varphi''(x) + \varphi(x), & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

con $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$ e φ e φ' continue per $x = \pi$. Determinare se l'operatore \mathcal{L} così definito è autoaggiunto e calcolarne autovalori ed autofunzioni.