

CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile
Appello del 31/7/2006

Nome:.....

N. matr.:.....

Ancona, 31 luglio 2006

1. Determinare la soluzione dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$, per la funzione incognita $u(x, y)$, nel dominio costituito dal semicerchio

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$$

e con le condizioni al contorno

$$u(x, y) = \begin{cases} x, & y = 0 \\ x + y, & x^2 + y^2 = 1 \\ y, & x = 0 \end{cases}$$

Ricordiamo l'espressione del Laplaciano in coordinate polari piane (r, φ) :

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

2. Si consideri l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x)$$

con il termine di sorgente $Q(x) = C \cos(\pi x/L)$. Siano $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$ ed $u(x, 0) = L/2 - |x - L/2|$ con le condizioni iniziali ed al contorno per la funzione incognita $u(x, t)$. Verificare, prima di risolvere l'equazione, se vale la legge di conservazione della quantità di calore. Determinare quindi la soluzione con le condizioni al contorno ed iniziali assegnate.

3. Determinare le caratteristiche dell'equazione del prim'ordine

$$x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

per la funzione incognita $u(x, y)$. Si consideri quindi il dato iniziale $u(x, y) = 1$ sulla curva Γ data dall'equazione $x^2 + y^2 = 4$. Determinare se esiste o meno la soluzione di questo problema di Cauchy, giustificando la risposta.