

CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2007/08: Appello del 29/3/2008

Nome:.....

N. matr.:.....

Ancona, 29 marzo 2008

1. (7 punti) È data l'equazione del prim'ordine

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{t+1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$. Determinarne le curve caratteristiche e trovarne la soluzione $u(x, t)$ con la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$.

2. (7 punti) Risolvere l'equazione del calore con un termine di sorgente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha x,$$

nell'intervallo $0 \leq x \leq L$, con le condizioni al contorno miste $u(0, t) = 0$ e $\partial u / \partial x(L, t) = -\alpha L^2 / (2K)$ e la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$.

3. (7 punti) Si consideri la soluzione numerica dell'equazione di Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2 u = 0.$$

- Scrivere le espressioni delle derivate seconde mediante le differenze centrate al second'ordine;
- sostituire le espressioni di cui sopra nell'equazione delle onde;
- studiare la stabilità dello schema numerico che ne risulta.

4. (7 punti) Discutere il problema di Cauchy per le equazioni quasi-lineari del prim'ordine, introducendo direzioni caratteristiche, curve caratteristiche e superfici integrali. Si consideri quindi l'equazione

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

Nel caso in cui la condizione iniziale venga assegnata sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, è assicurata l'unicità della soluzione?

5. (8 punti) Si consideri l'operatore

$$(\mathcal{L}\varphi)(x) = -\varphi''(x) + \varphi(x)$$

nel dominio $0 \leq x \leq L$ e con le condizioni al contorno periodiche $\varphi(x) = \varphi(x+L)$. Determinare se l'operatore \mathcal{L} così definito è autoaggiunto e calcolarne quindi autovalori ed autofunzioni.