CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2006/07: Appello del 24/9/2007

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 24 settembre 2007

1. Risolvere l'equazione del calore con un termine di sorgente
$$\frac{\partial u}{\partial t} - K\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S(x)$$
nel dominio $0 \leq x \leq L$, con $S(x) = S_0\,(1 - x/L)$, condizioni al contorno $u(0,t) = \alpha$, $u(L,t) = \beta$ e condizione iniziale $u(x,0) = h(x)$.

2. Determinare la soluzione dell' equazione del telegrafo con termine di richiamo,
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\lambda\frac{\partial u}{\partial t} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2 u = 0,$$
per $x \in [0, L]$, con le condizioni al contorno $u(0,t) = 0$ e $u(L,t) = 0$ e le condizioni iniziali $u(x,0) = h(x)$, $\partial u/\partial t(x,0) = 0$. Sia inoltre $\lambda = 3\,\pi\,v/L$, e $\gamma = \sqrt{5}\,\pi\,v/L$.

3. È data l'equazione del prim'ordine
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial u}{\partial y} = u.$$
Determinarne le curve caratteristiche e trovarne la soluzione con la condizione iniziale $u(1,y) = y^2$.

4. Enunciare e dimostrare il Principio di Massimo per l'equazione di Laplace. Determinare quindi il valore $\alpha = \alpha_0$ del parametro α per il quale la funzione
$$u(x,y) = x^4 + y^4 + \alpha\,x^2\,y^2,$$
definita nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x\}$ con $a > 0$, è soluzione dell'equazione di Laplace e calcolarne il massimo in tale dominio. Che cosa si può affermare sul massimo della funzione quando $\alpha \neq \alpha_0$?