CORSO di FISICA-MATEMATICA

per il

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2006/07: Appello del 20/4/2007

Nome:.................................

N. matr.:.................................   Ancona, 20 aprile 2007

1. Determinare la soluzione dell'equazione del calore nel dominio spaziale infinito $-\infty < x < +\infty$, in presenza di una sorgente $S(x)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S(x)$$

   con $S(x) = A\cos k_0 x$ e condizione iniziale $u(x,0) = B\sin x$.

2. Determinare la soluzione dell' equazione del telegrafo con termine costante,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma^2\frac{\partial u}{\partial t} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -r^2,$$

   per $x \in [0,L]$, con le condizioni al contorno $u(0,t) = \alpha$ e $u(L,t) = 0$ e le condizioni iniziali $u(x,0) = h(x)$, $\partial u/\partial t(x,0) = 0$.

3. Determinare la soluzione dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

   nel dominio $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, con le condizione al contorno di Dirichlet

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u(x,1) &= 1 \\ u(0,y) &= u(1,y) = y \end{aligned}$$

   sul bordo del dominio.

4. Illustrare il metodo dello sviluppo in autofunzioni per la soluzione dell'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   nel dominio finito $0 \le x \le L$ e con le condizioni al contorno non omogenee

   - $u(0,t) = \alpha$, $u(L,t) = \beta$;
   - $\partial u/\partial x(0,t) = \alpha$, $\partial u/\partial x(L,t) = \beta$.

Soluzioni.

1. Consideriamo prima la soluzione stazionaria, che obbedisce all'equazione

$$-K\, u_s''(x) = A\cos k_0 x$$

la cui soluzione è

$$u_s(x) = \frac{A}{Kk_0^2}\cos k_0 x.$$

Scriviamo quindi la soluzione dell'equazione di partenza come $u(x,t) = u_s(x) + w(x,t)$, dove adesso $w(x,t)$ obbedisce a

$$\frac{\partial w}{\partial t} - K\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad -\infty < x < +\infty$$

Sia ora $\widehat{w}_k(t)$ la trasformata di Fourier di w rispettoa d x. Abbiamo

$$\dot{\widehat{w}}_k + K\,k^2\,\widehat{w}_k = 0$$

con la soluzione

$$\widehat{w}_k(t) = C_k\,e^{-Kk^2 t}.$$

La costante $C_k = \widehat{w}_k(0)$ va determinata dalla condizione iniziale, che per w é

$$w(x,0) = u(x,0) - u_s(x) = B\sin x - \frac{A}{Kk_0^2}\cos k_0 x$$

e dunque

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[B\sin x - \frac{A}{Kk_0^2}\cos k_0 x\right] e^{-ikx}\,dk \\ &= \sqrt{2\pi}\left[\frac{B}{2i}\left(\delta(k-1) - \delta(k+1)\right) - \frac{A}{2Kk_0^2}\left(\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)\right)\right] \end{aligned}$$

Otteniamo quindi per la soluzione complessiva,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_s(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{w}_k(t)e^{ikx}\,dk \\ &= u_s(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} C_k\,e^{-Kk^2 t}\,e^{ikx}\,dk \\ &= u_s(x) + \left[\frac{B}{2i}\left(e^{-Kt+ix} - e^{-Kt+ix}\right) - \frac{A}{2Kk_0^2}\left(e^{-Kk_0^2 t + ik_0 x} + e^{-Kk_0^2 t + ik_0 x}\right)\right] \\ &= \frac{A}{Kk_0^2}\cos k_0 x + \left[\frac{B}{2i}\,e^{-Kt}\sin x - \frac{A}{Kk_0^2}\,e^{-Kk_0^2 t}\cos k_0 x\right] \\ &= \frac{A}{Kk_0^2}\left(1 - e^{-Kk_0^2 t}\right)\cos k_0 x + \frac{B}{2i}\,e^{-Kt}\sin x. \end{aligned}$$

2. L'equazione è non omogenea e lo sono pure le condizioni al contorno. Consideriamo quindi innanzitutto la soluzione stazionaria $u_s(x)$ con le condizioni al contorno non omogenee $u_s(0) = \alpha$, $u_s(L) = 0$:

$$u_s(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(\alpha - \frac{r^2 L x}{2v^2}\right).$$

La soluzione complessiva si scrive dunque nella forma $u(x,t) = u_s(x) + w(x,t)$ dove w soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\gamma^2 \frac{\partial w}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

con le condizioni al contorno omogenee $w(0,t) = w(L,t) = 0$. La soluzione è nota (vedi dispense):

$$w(x,t) = e^{-\gamma^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \ (A_n \cos \nu_n t + B_n \sin \nu_n t)$$

con $\nu_n = \sqrt{\omega_n^2 - \gamma^4}$, dove $\omega_n = k_n v$ e $k_n = n\pi/L$. Le costanti A_n e B_n vanno determinate dalle condizioni iniziali, per le quali ci serve l'espressione per la derivata:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma^2 w(x,t) + e^{-\gamma^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \sin k_n x \ (-A_n \sin \nu_n t + B_n \cos \nu_n t) \, .$$

Le condizioni iniziali diventano dunque:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x = h(x) - u_s(x)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n B_n \sin k_n x = \gamma^2 \left[h(x) - u_s(x) \right],$$

da cui

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[h(x) - u_s(x) \right] \sin k_n x \, dx$$
$$B_n = \frac{2\gamma^2}{L\nu_n} \int_0^L \left[h(x) - u_s(x) \right] \sin k_n x \, dx.$$

3. Procedendo come nel paragrafo 9.3 delle dispense, con $a = b = 1$ ed $f_1(y) = f_2(y) = y$,$f_3(x) = 0$, $f_4(x) = 1$, si vede subito che $w(x,y) = y$ e che $g_1(y) = g_2(y) = g_3(x) = g_4(x) = 0$. Si ottengono facilmente le soluzione parziali $v_1(x,y) = v_2(x,y) = v_3(x,y) = v_4(x,y) = 0$ e quindi

$$u(x,y) = w(x,y) = y.$$