CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2007/08: Appello del 20/10/2008

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 20 ottobre 2008

1. (7 punti) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \sin \alpha\, x \cosh\, y$$

nel dominio rettangolare $\Omega = (x,y) : 0 \leq x \leq \pi/\alpha, 0 \leq y \leq b$, con $b > 0$. Per quali valori di α la funzione $f(x,y)$ assume il massimo sulla frontiera del dominio? Per quali invece assume il minimo? E per quali valori di α la funzione $f(x,y)$ è soluzione dell'equazione di Laplace in Ω? Determinare, infine, in corrispondenza a tali valori di α, le condizioni al contorno per cui la soluzione è unica.

2. (9 punti) Determinare la soluzione dell' equazione del telegrafo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ soddisfa $0 < \lambda < \pi/L$, nel dominio finito $0 \leq x \leq L$ con le condizioni al contorno $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 1$ e le condizioni iniziali

$$u(x,0) = h(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

3. (9 punti) È data l'equazione del prim'ordine

$$\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Determinarne le curve caratteristiche e trovarne la soluzione $u(x,y)$ con la condizione iniziale $u(x,1) = e^{-x}$.

4. (7 punti) Enunciare e dimostrare il Principio di Massimo per l'equazione di Laplace.

1) $\Delta f = (1-\alpha^2)\sin\alpha x \cosh y$ $\qquad \Delta f > 0$ per $|\alpha|<1$

$\Delta f < 0$ per $|\alpha| > 1$

$\Delta f = 0$ per $\alpha = \pm 1$

$|\alpha|<1$ MAX nella frontiera

$|\alpha|>1$ MIN "

$\alpha = \pm 1$ soluzione Laplace

$\alpha = \pm 1 \longrightarrow f(x,0) = \pm \sin x \qquad f(\pi, y) = 0$

$f(x,b) = \pm \sin x \cosh b \qquad f(0,y) = 0$

---

2) $\begin{cases} u_s'' = 0 \\ u_s(0) = 0, \; u_s(L) = 1 \end{cases}$ $\qquad u_s(x) = \dfrac{x}{L}$

$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t)$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\lambda \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \end{cases}$ $\qquad v(x,0) = h(x) - u_s(x)$

Autofunzioni $\begin{cases} \varphi_n'' + k_n^2 \varphi_n = 0 \\ \varphi_n(0) = \varphi_n(L) = 0 \end{cases}$ $\qquad \varphi_n(x) = \sin k_n x \qquad k_n = \dfrac{n\pi}{L}$

$n = 1, 2, \dots$

$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\varphi_n(x) \longrightarrow \ddot{c}_n + 2\lambda \dot{c}_n + k_n^2 c_n = 0$

$p^2 + 2\lambda p + k_n^2 = 0 \qquad p_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - k_n^2} =$

$= -\lambda \pm i\omega_n$

$\omega_n = \sqrt{k_n^2 - \lambda^2}$

$c_n(t) = e^{-\lambda t}\left[A_n e^{i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}\right] =$

$= e^{-\lambda t}\left[C_n \cos\omega_n t + D_n \sin\omega_n t\right]$

$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda t}\left[C_n \cos\omega_n t + D_n \sin\omega_n t\right]\sin k_n x$

$C_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L \left[h(x) - u_s(x)\right]\sin k_n x \, dx$

$\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\lambda v + \sum_n e^{-\lambda t}\omega_n\left[-C_n \sin\omega_n t + D_n \cos\omega_n t\right] \qquad \dfrac{\partial v}{\partial t}(0) = \sum_n \omega_n D_n \cos\omega_n t$

$\Rightarrow \boxed{D_n = 0}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{y} \\ \dot{y} = -\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \qquad \ln y = \ln \frac{c}{x}$

$xy = C$ proiezione caratteristiche $\qquad y = \frac{c}{x}$ iperbole equilatera

$\dot{x} = \frac{x}{C} \qquad \frac{dx}{d\tau} = \frac{x}{C} \qquad \begin{cases} x(\tau) = x(0) e^{\tau/C} \\ y(\tau) = \frac{c}{x(0)} e^{-\tau/C} \\ z(\tau) = z(0) \end{cases}$

Dati iniziali: $\begin{cases} x = s \\ y = 1 \\ z = e^{-s} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(\tau, s) = s e^{\tau/c} & \Rightarrow x(0) = s \\ y(\tau, s) = e^{-\tau/c} & \Rightarrow c = s \\ z(\tau; s) = e^{-s} \end{cases}$

$\begin{cases} x = s e^{\tau/s} \\ y = e^{-\tau/s} \\ z = e^{-s} \end{cases}$

$xy = s$

$\boxed{z = e^{-xy}} \qquad \boxed{u(x,y) = e^{-xy}}$