CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

Appello del 19/4/2006

Nome:..................................
N. matr.:.................................. Ancona, 23 marzo 2006

1. Determinare la soluzione dell'equazione di Laplace (in coordinate polari piane)
$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$
per la funzione incognita $u(r, \phi)$, nel dominio costituito dalla corona circolare $\Omega = \{(r, \phi) : R_1 \leq r \leq R_2,\ \ 0 \leq \phi < 2\pi\}$, con $0 < R_1 < R_2$ e con le condizioni al contorno $u(R_1, \phi) = 1 + \cos\phi$ e $u(R_2, \phi) = 1 - \cos\phi$.

   Suggerimento: ripercorrere passo dopo passo la soluzione dell'equazione di Laplace nel disco, introducendo gli opportuni cambiamenti dove sono necessari.

2. Determinare le curve caratteristiche dell'equazione del prim'ordine
$$x\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$
e tracciarne il grafico. Determinare quindi la soluzione dell'equazione con la condizione $u(x, y) = x^2$ sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Dire inoltre, se la soluzione cosi' ottenuta è definita su tutto il piano (x, y) o soltanto su un suo sottodominio; in tal caso, indicare almeno qualitativamente tale sottodominio.

3. Illustrare la riduzione in forma canonica delle equazioni differenziali del second'ordine in due variabili, ricavandone così la classificazione. Trattare dapprima il caso a coefficienti costanti e quindi, a grandi linee, quello a coeffcienti variabili. Studiare quindi la classificazione dell'equazione differenziale
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \alpha \sin x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
al variare del parametro α.