

CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2006/07: Appello del 19/1/2007

Nome:.....

N. matr.:.....

Ancona, 19 gennaio 2007

1. È data l'equazione differenziale lineare del prim'ordine

$$\frac{y}{4} \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

per la funzione incognita $u(x, y)$, nel dominio $\Omega = \mathbb{R}^2$. Determinarne la soluzione nel dominio Ω con il dato di Cauchy $u(x, y) = y^2$ sulla retta di equazione $y = x + \lambda$. Per quale valore di λ , $\lambda = \lambda_0$, la soluzione è definita in tutto Ω ? In quale parte del dominio non è definita per $\lambda \neq \lambda_0$?

Suggerimento: aiutarsi con una rappresentazione grafica.

2. Determinare la soluzione dell'equazione di Klein-Gordon con termine di smorzamento

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2 u + 2 \lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

nel dominio $0 \leq x \leq L$ con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin(\pi x/L) & x \leq L/2 \\ 0 & x > L/2 \end{cases}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

e le condizioni al contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Fare quindi un grafico qualitativo della soluzione.

3. Determinare la soluzione dell'equazione di Laplace in un disco di raggio R e centro l'origine con la condizione al contorno di Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n}(R, \phi) = f(\phi) = \cos \phi,$$

dove $\partial/\partial n$ indica la derivata nella direzione della normale esterna al bordo del dominio. Quante soluzioni ammette il problema?

4. (i) Enunciare e dimostrare il Principio di Massimo per l'equazione di Laplace;
(ii) dimostrare l'unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con condizioni al contorno di Dirichlet.