CORSO di FISICA-MATEMATICA

per il

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2007/08: Appello del 18/12/2007

Nome:...............................

N. matr.:............................... Ancona, 18 dicembre 2007

1. (7 punti) È data l'equazione del prim'ordine
$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2x\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$
Determinarne le curve caratteristiche e trovarne la soluzione $u(x,y)$ con la condizione iniziale $u(x,0) = \cos x$. Determinare inoltre (graficamente ed analiticamente) il dominio di definizione della soluzione e tracciare il grafico della curva $u(x,y) = 1$.

2. (9 punti) Classificare l'equazione del second'ordine
$$5\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
al variare del parametro λ e determinarne la soluzione nel caso $\lambda = 3$ con le condizioni ausiliarie
$$\begin{aligned} &u(x,0) = e^{-x^2} \\ &\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = x\,e^{-x^2} \end{aligned}$$
con $-\infty < x < +\infty$.

3. (8 punti) Dimostrare che la funzione $u(x,y) = x^4 + \lambda\,y^4 + \mu x^2\,y^2$ non è soluzione dell'equazione di Laplace nel dominio $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ per $\lambda \neq 1$ e per qualunque valore di μ. Nel caso $\lambda = 1$, invece, per quale valore di μ la funzione è soluzione dell'equazione di Laplace? Determinare, in quest'ultimo caso, i massimi ed i minimi della funzione nel dominio D.

4. (6 punti) Sia $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, una funzione reale di variabile reale. Quale proprietà deve avere la sua trasformata di Fourier $\widehat{f}(k)$, supposto che esista? Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = x\,e^{-|x|}$, esplicitarne la parte reale e la parte immaginaria, e verificare se possiede tale proprietà.

5. (5 punti) Si consideri l'equazione del calore con conducibilità termica non costante
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

dove $K(x)$ è la funzione continua a tratti

$$K(x) = \begin{cases} K_1, & 0 \le x \le L/2 \\ K_2, & L/2 < x \le L \end{cases}$$

Siano $u(0,t) = u(L,t) = 0$ le condizioni al contorno, con u e $\partial u/\partial x$ continue per $x = L/2$. L'insieme di autofunzioni appropriato per questo problema è quello dell'operatore differenziale del second'ordine

$$(\mathcal{L}\,\varphi)(x) = \begin{cases} -K_1\,\varphi''(x), & 0 \le x \le L/2 \\ -K_2\,\varphi''(x), & L/2 < x \le L \end{cases}$$

con $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ e φ e φ' continue per $x = L/2$. Determinare autovalori ed autofunzioni dell'operatore $\mathcal{L}$ così definito; è $\mathcal{L}$ autoaggiunto?