CORSO di FISICA-MATEMATICA

per il

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2007/08: Appello del 16/2/2008

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 16 febbraio 2008

1. (5 punti) È data l'equazione del prim'ordine

$$\frac{\partial u}{\partial t} - t\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$. Determinarne le curve caratteristiche e trovarne la soluzione $u(x,y)$ con la condizione iniziale $u(x,0) = h(x)$.

2. (8 punti) Si consideri l'equazione del telegrafo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\lambda\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

nel dominio $-\infty < x < +\infty$ con le condizioni iniziali $u(x,0) = h(x)$ e $\partial u/\partial t(x,0) = 0$, dove

$$h(x) = \begin{cases} U_0 & -L < x < L \\ 0 & |x| \geq L \end{cases}$$

e sia $u_k(t)$ la trasformata di Fourier della funzione $u(x,t)$ rispetto ad x.

- Scrivere l'equazione cui obbedisce $u_k(t)$ e determinarne la soluzione;
- trascurando il termine λ^2 rispetto a $k^2 v^2$, imporre le condizioni iniziali sulla funzione $u_k(t)$ ed invertire la trasformata di Fourier per ottenere la soluzione dell'equazione (*discutere questo punto con il docente*).

3. (8 punti) Si consideri la soluzione numerica dell'equazione del trasporto libero

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

- Formulare lo schema di Eulero esplicito con differenze finite in avanti anche nello spazio;
- sostituire le espressioni di cui sopra nell'equazione di trasporto;
- studiare la stabilità dello schema numerico che ne risulta al variare del parametro $\nu = v\,\Delta t/\Delta x$;
- come cambia la stabilità se si usano differenze finite all'indietro nello spazio?

4. (7 punti) Enunciare e dimostrare il Principio di Massimo per l'operatore Laplaciano definito in un dominio chiuso e limitato $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Si consideri quindi la funzione $u(x, y) = x^4 + \lambda\, y^4 + \mu\, (x - y)$ definita nel dominio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$; per quali valori di λ e μ tale funzione assume il massimo sul bordo del dominio?

5. (5 punti) Si consideri l'operatore

$$(\mathcal{L}\, \varphi)(x) = -\varphi''(x) + \gamma^2\, \varphi(x)$$

nel dominio $0 \leq x \leq L$ e con le condizioni al contorno $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(L) = 0$. Determinare se l'operatore $\mathcal{L}$ così definito è autoaggiunto e calcolarne quindi autovalori ed autofunzioni nel caso $\gamma = \pi/(2L)$.