CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2006/07: Appello del 15/12/2006

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 15 dicembre 2006

1. È data l'equazione differenziale del prim'ordine di tipo evolutivo
$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = u^2$$
per la funzione incognita $u(x,t)$, nel dominio
$\Omega = \{(x,t) : -\infty < x < +\infty, 0 \leq t < +\infty\}$. Dire se è un'equazione lineare o quasi-lineare, giustificando la risposta. Determinarne la soluzione nel dominio Ω con il dato di Cauchy
$$u(x,0) = h(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
La soluzione è definita in tutto Ω? In caso negativo, specificare dove non è definita.

2. Determinare l'evoluzione temporale della temperatura di una sbarra conduttrice di calore di lunghezza L e conducibilità termica K, quando un'estremità viene tenuta a temperatura costante T_0 ed all'altra estremità il sistema è termicamente isolato in presenza di una sorgente di calore $Q(x)$ data da
$$Q(x) = q\left(\frac{L}{2} - x\right)$$
con $q > 0$ ed a partire dalla condizione iniziale $u(x,0) = T_0$. Infine, fornire una rappresentazione grafica qualitativa del profilo della funzione ad alcuni istanti temporali.

3. Per quali valori di α la funzione $u(x,y) = x^2 + \alpha y^2$ può rappresentare la distribuzione stazionaria della temperatura di una lamina conduttrice piana circolare di raggio R e conducibilità termica costante? In corrispondenza a tali valori di α, determinare le condizioni al contorno compatibili con tale distribuzione.

4. Discutere il problema di Cauchy per le equazioni quasi-lineari del second'ordine, introducendo le curve caratteristiche e la classificazione delle equazioni in iperboliche, paraboliche ed ellittiche.