CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2006/07: Appello del 12/1/2007

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 12 gennaio 2007

1. È data l'equazione differenziale del prim'ordine
$$(y-1)\,\frac{\partial u}{\partial x}+(x-1)\,\frac{\partial u}{\partial y}=0$$
per la funzione incognita $u(x,y)$, nel dominio $\Omega=\mathbb{R}^2$. Dire se è un'equazione lineare o quasi-lineare, giustificando la risposta. Determinarne la soluzione nel dominio Ω con il dato di Cauchy $u(x,y)=y^2$ sulla retta di equazione $x=\lambda$. Per quale valore di λ, $\lambda=\lambda_0$, la soluzione è definita in tutto Ω? In quale parte del dominio non è definita per $\lambda\neq\lambda_0$?
Suggerimento: aiutarsi con una rappresentazione grafica.

2. Determinare l'evoluzione temporale della densità $n(x,t)$ di una sostanza che diffonde in un mezzo con coefficiente di diffusione D e velocità di convezione costante v, nel dominio spaziale $0\leq x\leq L$, con condizioni al contorno di flusso nullo agli estremi e condizione iniziale
$$n(x,0)=N_0\left(1-\frac{x}{L}\right).$$
La densità evolve verso una soluzione stazionaria? In caso affermativo, determinarla. Se cambiassimo la condizione iniziale, lo stato stazionario sarebbe lo stesso? Giustificare la risposta.

3. Determinare la soluzione dell' equazione di Klein-Gordon
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\gamma^2 u=0$$
nel dominio finito $0\leq x\leq L$ con le condizioni al contorno $u(0,t)=L$, $u(L,t)=0$ e la condizione iniziale
$$u(x,0)=L\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$
Fare quindi un grafico, qualitativo ma sufficientemente preciso, della soluzione nel caso $L=v=\gamma=1$.

4. Introdurre i concetti di superficie integrale, direzioni caratteristiche e curve caratteristiche per le equazioni quasi-lineari del prim'ordine, ed impostare quindi il problema di Cauchy.