Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile
Anno Accademico 2009/2010
Fisica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 17 giugno 2010

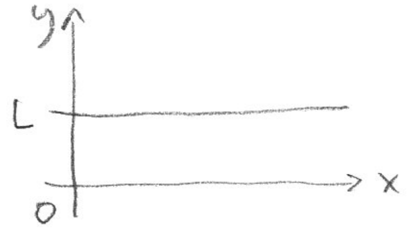
1. (7 punti) Discutere il problema di Cauchy per le equazioni quasi lineari del prim'ordine, introducendo i concetti di superficie integrale, direzioni e curve caratteristiche e la loro relazione. Enunciare e dimostrare quindi il teorema che individua le superfici integrali come insiemi di curve caratteristiche.

2. (9 punti) Determinare la soluzione dell'equazione di Laplace nella striscia semi-infinita del piano (x, y) racchiusa dalle rette di equazione $y = 0$, $y = L$ e $x = 0$, con le condizioni al contorno di Dirichlet $u(0, y) = y\,(1-y)$, $u(x, 0) = u(x, L) = 0$ e $u(x, y) \to 0$ all'infinito.

3. (9 punti) Determinare la soluzione dell'equazione del calore con termine di sorgente,
$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S(x)$$
nel dominio $0 \leq x \leq L$, dove
$$S(x) = S_0\left(1 - \left|\frac{L}{2} - x\right|\right)$$
condizioni al contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$, di continuità della soluzione e della sua derivata in $x = L/2$ e condizione iniziale $u(x, 0) = f(x)$.

4. (8 punti) Una corda di lunghezza infinita, che si trova in quiete all'istante iniziale, viene percossa in un punto A subendo una velocità iniziale che si può esprimere come $\phi(x) = \phi_0\,\delta(x)$, dove si è posta in A l'origine delle coordinate. Determinare il profilo della corda per i tempi successivi.

(2)



$$\Delta u = 0 \qquad u(0,y) = y(L-y) \qquad u(x,y) \to 0$$
$$u(x,0) = u(x,L) = 0 \qquad x \to \infty$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x)\varphi_n(y) \qquad \varphi_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{L} \qquad \varphi_n'' = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\varphi_n$$

$$\Delta u = 0 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n''\varphi_n + C_n\varphi_n''\right\} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n'' - \frac{n^2\pi^2}{L^2}C_n\right\}\varphi_n = 0 \Rightarrow C_n'' - \frac{n^2\pi^2}{L^2}C_n = 0 \quad \forall n$$

$$C_n(x) = A_n e^{n\pi x/L} + B_n e^{-n\pi x/L}$$

$A_n = 0$ perchè $u \to 0$ all'infinito

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi x/L}\varphi_n(y)$$

$$y(1-y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\varphi_n(y) \Rightarrow A_n = \frac{2}{L}\int_0^L y(1-y)\varphi_n(y)\,dy$$

---

(3)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = U_s(x) + v(x,t)$$
$$v(x,0) = f(x)$$
$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-t/\tau_n}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$k u_s'' + S(x) = 0 \qquad x < \frac{L}{2} \quad S(x) = S_0\left[1 - \frac{L}{2} + x\right] \quad (1)$$

$$x > \frac{L}{2} \quad S(x) = S_0\left[1 + \frac{L}{2} - x\right] \quad (2)$$

(1) $$u_s' = -\frac{S_0}{k}\left[\left(1-\frac{L}{2}\right)x + \frac{x^2}{2} + A\right]; \quad u_s = -\frac{S_0}{k}\left[\left(1-\frac{L}{2}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + Ax + B\right]$$

(2) $$u_s' = -\frac{S_0}{k}\left[\left(1+\frac{L}{2}\right)x - \frac{x^2}{2} + C\right]; \quad u_s = -\frac{S_0}{k}\left[\left(1+\frac{L}{2}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + Cx + D\right]$$

$$u_s(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$u_s(L) = 0 \Rightarrow \left(1+\frac{L}{2}\right)\frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{6} + CL + D = 0$$

$u_s'\left(\frac{L}{2}\right)$ continua $\Rightarrow$ $\left(\cancel{1}-\frac{L}{2}\right)\frac{L}{2}+\frac{L^2}{8}+A=\left(\cancel{1}+\frac{L}{2}\right)\frac{L}{2}-\frac{L^2}{8}+C$

$u_s\left(\frac{L}{2}\right)$ " $\Rightarrow$ $\left(\cancel{1}-\frac{L}{2}\right)\frac{L^2}{8}+\frac{L^3}{48}+A\frac{L}{2}=\left(\cancel{1}+\frac{L}{2}\right)\frac{L^2}{8}-\frac{L^3}{48}+C\frac{L}{2}+D$

Le tre equazioni danno A, C, D e completano il problema

---

(4) Da D'Alembert : $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[h(x+vt)+h(x-vt)\right]+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}\phi(\lambda)\,d\lambda$

Con $h(x)=0$ e $\phi(x)=\phi_0\,\delta(x)$:

$$u(x,t)=\frac{\Phi_0}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}\delta(\lambda)\,d\lambda = \frac{\Phi_0}{2v} \quad \text{se} \quad x-vt<0<x+vt$$

cioè $-vt<x<vt$

$= 0$ se $x-vt>0$ cioè $x>vt$

o $x+vt<0$ cioè $x<-vt$