

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile
Anno Accademico 2009/2010
Fisica Matematica

Nome

N. Matricola

Ancona, 26 febbraio 2010

1. (7 punti) Illustrare la classificazione delle equazioni del second'ordine a derivate parziali, introducendo il problema di Cauchy e le curve caratteristiche.
2. (9 punti) Determinare la soluzione dell'equazione del prim'ordine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1-x) \frac{\partial u}{\partial x} = 1,$$

$-\infty < x < +\infty, t \geq 0$, con la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$, dove

$$h(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

3. (9 punti) Risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$

nel dominio $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, con $u = 0$ sulla frontiera $\partial\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$.

4. (8 punti) Determinare la soluzione dell'equazione delle onde con termine di sorgente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos x$$

nel dominio $-\infty < x < +\infty$, con la condizione iniziale $u(x, 0) = \sin x, \partial u / \partial t(x, 0) = 1 + x$

$$2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (1-x) \frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{dz} = 1 \\ \frac{dx}{dz} = 1-x \\ \frac{dz}{dz} = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} t=z \\ x(z) = 1 + (s-1)e^{-z} \\ z(z) = z + h(s) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} z=t \\ s = (x-1)e^t + 1 \\ u(x,t) = z(e,s) = t + h((x-1)e^t + 1) \end{array} \right.$$

$$|(x-1)e^t + 1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq (x-1)e^t + 1 \leq 1, \quad -2 \leq (x-1)e^t \leq 0$$

$$\Rightarrow -2e^{-t} \leq x-1 \leq 0 \quad 1-2e^{-t} \leq x \leq 1$$

$$u(x,t) = \begin{cases} t+1 & \text{für } 1-2e^{-t} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x < 1-2e^{-t} \text{ oder } x > 1 \end{cases}$$

$$3) \quad \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$u(r, \varphi) = \sum_m U_m(r) e^{in\varphi} \quad 1 = \sum_m \delta_{m0} e^{in\varphi} \quad \sum_m U_m(r) e^{in\varphi} = 0 \Rightarrow \boxed{U_m(r) = 0}$$

$$\Delta u = 1 \rightarrow \sum_m \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r U_m') - \frac{n^2}{r^2} U_m - \delta_{m0} \right\} e^{in\varphi} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m=0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r U_0') - 1 = 0 \\ m \neq 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r U_m') - \frac{n^2}{r^2} U_m = 0 \end{array} \right.$$

$$(r U_0')' = r; \quad r U_0' = \frac{r^2}{2} + C \quad U_0' = \frac{r}{2} + \frac{C}{r} \Rightarrow C=0$$

$$U_0 = \frac{r^2}{2} + C_2 \quad U_0(r) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{R^2}{2} \quad U_0(r) = \frac{r^2 - R^2}{2}$$

$$U_n(r) = A_n r^n \quad U_n(R) = 0 \Rightarrow A_n = 0 \quad n \neq 0$$

$$u(r, \varphi) = \frac{r^2 - R^2}{2}$$

$$4) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos x$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$u(x, 0) = \sin x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1 + x$$

$$u(x, t) = u_s(x) + v(x, t)$$

$$-v^2 u_s'' = \cos x$$

$$u_s(x) = \cos \frac{x}{v}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [h(x+vt) + h(x-vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \phi(\lambda) d\lambda$$

$$\text{con } h(x) = \sin x - \cos \frac{x}{v}$$

$$\phi(x) = 1 + x$$

$$v(x, t) = \frac{1}{2} \left[\sin(x+vt) + \sin(x-vt) - \cos \frac{x+vt}{v} - \cos \frac{x-vt}{v} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2v} \left[\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \right]_{x-vt}^{x+vt}$$

$$= 2 \sin x \cos vt - 2 \cos \frac{x}{v} \cos vt +$$

$$+ \frac{1}{2v} \left[2vt + \frac{2xvt}{2} \right] =$$

$$= 2 \left[\sin x \cos vt - \cos \frac{x}{v} \cos vt \right] + t \left(1 + \frac{x}{2} \right)$$