CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2008/09: Appello del 24/6/2009

Nome:...............................

N. matr.:............................... Ancona, 24 giugno 2009

1. (9 punti) Determinare la soluzione dell' equazione del second'ordine iperbolica
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$
dove $0 < \lambda < 1/2$, con le condizioni ausiliarie $u(x,0) = h(x)$, $\partial u/\partial t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(2\pi, t) = 1$.

2. (9 punti) Determinare la soluzione dell'equazione del calore con un termine di sorgente
$$\frac{\partial u}{\partial t} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S(x),$$
nell'intervallo $0 \leq x \leq L$, con le condizioni al contorno $u(0,t) = U_0$ e $u(L,t) = 0$ e la condizione iniziale $u(x,0) = h(x) = U_0$. Sia inoltre $S(x) = 6\,K\,U_0\,(L - x)/L^3$.

3. (8 punti) Enunciare e dimostrare il Principio di Massimo per l'equazione di Laplace. Si consideri quindi la funzione
$$f(x,y) = \alpha\, x^4 + \beta\, x^3\, y + \gamma\, x^2\, y^2 + \delta\, x\, y^3 + \varepsilon\, y^4$$
definita nel dominio $D = \{(x,y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$.
   (i) Quale relazione deve sussistere tra i parametri α, β, γ, δ ed ε in modo che la funzione assuma il massimo ed il minimo sulla frontiera del dominio D? Questo risultato dipende da R?
   (ii) Posto $\alpha = 1$ e $\beta = 4$, determinare il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y)$ nel dominio D.

4. (8 punti) Discutere il problema di Cauchy per le equazioni quasi-lineari del prim'ordine, introducendo direzioni caratteristiche, curve caratteristiche e superfici integrali. Si consideri quindi l'equazione
$$y\,\frac{\partial u}{\partial x} + (1-x)\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
e se ne determino le curve caratteristiche. Nel caso in cui la condizione iniziale venga assegnata sulla retta $y = x$, in quale regione del piano (x,y) sarà definita la soluzione?

1) $\boxed{u_s'' - 2\lambda u_s' = 0}$ $\qquad u_s(x) = A + B e^{2\lambda x}$

$u_s(0) = 0 \qquad u_s(2\pi) = 1$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A + B e^{4\lambda\pi} = 1 \end{cases} \qquad A\left(1 - e^{4\pi\lambda}\right) = 1$$

$$\boxed{u_s(x) = \frac{1 - e^{2\lambda x}}{1 - e^{4\pi\lambda}}} \qquad A = \frac{1}{1 - e^{4\pi\lambda}} = -B$$

$L\varphi = \varphi'' - 2\lambda\varphi' \qquad L\varphi_n = \mu_n \varphi_n \qquad \varphi_n'' - 2\lambda\varphi_n' - \mu_n\varphi_n = 0$

$\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0 \qquad \rho_{1,2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + \mu_n} \equiv \lambda \pm \nu_n$

$\varphi_n(x) = e^{\lambda x}\left(A e^{\nu_n x} + B e^{-\nu_n x}\right) \qquad \varphi(0) = 0 \Rightarrow B = -A$

$\varphi(2\pi) = 0 \Rightarrow e^{2\pi\nu_n} - e^{-2\pi\nu_n} = 0$

$e^{4\pi\nu_n} = 1 \qquad 4\pi\nu_n = 2in\pi$

$\boxed{\nu_n = \frac{ni}{2}} \qquad n = 1, 2, \dots$

$\sqrt{\lambda^2 + \mu_n} = \frac{ni}{2}$

$\lambda^2 + \mu_n = -\frac{n^2}{4}$

$$\boxed{\varphi_n(x) = e^{\lambda x} \sin\frac{nx}{2}}$$

$$\boxed{\mu_n = -\lambda^2 - \frac{n^2}{4} = -\omega_n^2}$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\varphi_n(x) \Longrightarrow \ddot{c}_n - \mu_n c_n = 0$$

$$c_n + \omega_n^2 c_n = 0$$

$$c_n(t) = A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t$$

$$u(x,t) = u_s(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t\right)\varphi_n(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n\left(A_n \cos\omega_n t - B_n \sin\omega_n t\right)\varphi_n(x)$$

$$h(x) = u_s(x) + \sum_n B_n \varphi_n(x) \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[h(x) - u_s(x)\right]\sin\frac{nx}{2}\,dx$$

$$0 = \sum_n \omega_n A_n \varphi_n(x) \qquad A_n = 0$$

2) $-K u_S'' = 6KU_0 \frac{L-x}{L^3}$ $\quad u_S'' = \frac{6U_0}{L^3}(x-L)$

$u_S' = \frac{6U_0}{L^3}\left(\frac{x^2}{2} - Lx + C_1\right)$ $\quad u_S = \frac{6U_0}{L^3}\left(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2\right)$

$u_S(0) = U_0 \Rightarrow C_2 = \frac{L^3}{6}$ $\quad u_S(L) = 0 \Rightarrow \frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{2} + LC_1 + \frac{L^3}{6} = 0$

$C_1 = \frac{L^2}{6}$ $\quad u_S(x) = \frac{6U_0}{L^3}\left(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2} + L^2\frac{x}{6} + \frac{L^3}{6}\right)$

$u(x,t) = u_S(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sin\frac{n\pi}{L}x$ $\quad C_n(t) = C_n(0)e^{-t/\tau_n}$

$U_0 = u_S(x) + \sum_n C_n(0)\sin\frac{n\pi x}{L}$ $\quad C_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \left[U_0 - u_S(x)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

---

3) $\Delta f = 12\alpha x^2 + 6\beta xy + 2\gamma(x^2+y^2) + 6\delta xy + 12\varepsilon y^2 = 0$

$(12\alpha + 2\gamma)x^2 + (12\varepsilon + 2\gamma)y^2 + 6(\beta+\delta)xy = 0$

$\Rightarrow$ $\gamma = -6\alpha$ $\qquad \alpha, \beta$ qualsiasi

$\gamma = -6\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \alpha$ $\qquad \gamma = -6\alpha \quad \delta = -\beta \quad \varepsilon = \alpha$

$\delta = -\beta$

$\alpha = 1 \quad \beta = 4 \rightarrow f(x,y) = x^4 + 4x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

$x = R\cos\varphi$ $\quad f(\varphi) = R^4\left(\cos^4\varphi + 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi\right)$

$y = R\sin\varphi$

$f'(\varphi) = R^4\{-4\cos^3\varphi\sin\varphi + 4(-3\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \cos^4\varphi) - 6(2\sin\varphi\cos^3\varphi - 2\cos\varphi\sin^3\varphi) - 4(-\sin^4\varphi + 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi) + 4\sin^3\varphi\cos\varphi\} =$

$= R^4\{4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) - 16\cos^3\varphi\sin\varphi + 16\cos\varphi\sin^3\varphi - 24\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}$

$$f'(\varphi)=R^4\left\{4\left[(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2-2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right]-8\sin 2\varphi\cos 2\varphi-6\sin^2 2\varphi\right\}=$$

$$=R^4\left\{4-2\sin^2 2\varphi-4\sin 4\varphi-6\sin^2 2\varphi\right\}=$$

$$=R^4\left\{4(1-2\sin^2 2\varphi)-4\sin 4\varphi\right\}=R^4\left(4\cos 4\varphi-4\sin 4\varphi\right)$$

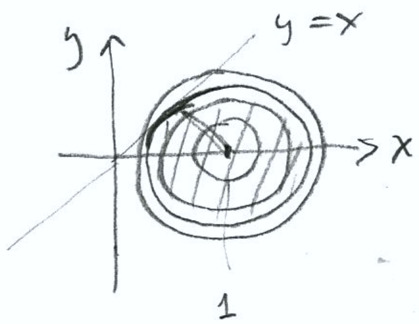
$$4\varphi=\arctan(1) \qquad \varphi=\begin{cases}\pi/16\\ 5\pi/16\end{cases}$$

---

4) $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=1-x\end{cases}$ $\qquad \ddot{x}=1-x \qquad \ddot{x}+x=1$

$$\begin{cases}x(\tau)=1+A\cos\tau+B\sin\tau\\ y(\tau)=-A\sin\tau+B\cos\tau\end{cases}$$

$$(x-1)^2+y^2=R^2$$



Non ci sono soluzioni nella regione $(x-1)^2+y^2\le 2$