CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2008/09: Appello del 24/1/2009

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 24 gennaio 2009

1. (10 punti)

   (i) Ricavare la soluzione dell'equazione di Laplace in un dominio circolare di centro l'origine e raggio unitario, con condizione al contorno di Dirichlet $f(\phi)$.

   (ii) Come si ricaverebbe la soluzione se il dominio fosse un disco di raggio unitario e centro nel punto di coordinate $(1,1)$?

   Ricordo l'espressione del Laplaciano in coordinate polari piane:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

2. (7 punti) Si consideri l'operatore

$$(\mathcal{L}\,\varphi)(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}$$

   definito sulle funzioni reali, continue ed integrabili nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$. Dimostrare che è un operatore lineare e autoaggiunto. Determinarne quindi autovalori ed autofunzioni.

3. (7 punti) È data l'equazione del prim'ordine

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

   $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Determinarne le curve caratteristiche e trovarne la soluzione $u(x,y)$ con la condizione iniziale $u(x,1) = x^3$. È la soluzione definita in tutto il piano (x,y)?

4. (10 punti)

   (i) Ricavare la soluzione di d'Alembert per l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

   nel dominio $-\infty \leq x \leq +\infty$ con le condizioni iniziali

$$u(x,0) = h(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \phi(x).$$

   Illustrare quindi le nozioni di cono d'influenza e dominio di dipendenza.

   (ii) Determinare la soluzione nel caso $h(x) = e^{-|x|}$ e $\phi(x) = e^{-|x|}\sin x$

① (i) VEDI DISPENSE (ii) Basta trasformare $\boxed{\begin{array}{l} x \to x' = x-1 \\ y \to y' = y-1 \end{array}}$

Allora $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}$ e si ha l'equazione di Laplace nel disco centrato in O.

② $\mathcal{L}(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathcal{L}\varphi_1 + \mathcal{L}\varphi_2$ e $\mathcal{L}(\lambda\varphi) = \lambda \mathcal{L}\varphi$ VERIFICABILI FACILMENTE

$\mathcal{L}$ è autoaggiunto con $(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)\,dx$. Infatti

$$(\mathcal{L}\varphi, \psi) = \int \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}\psi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \varphi(x)\psi(x)\,dx + \frac{1}{2}\int \varphi(-x)\psi(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \varphi(x)\psi(x)\,dx + \frac{1}{2}\int \varphi(x)\psi(-x)\,dx = \dots = (\varphi, \mathcal{L}\psi)$$

Autovalori: $\mathcal{L}\varphi = \lambda\varphi$ $\quad \varphi(x) + \varphi(-x) = 2\lambda\varphi(x)$

$\varphi(-x) = (2\lambda - 1)\varphi(x)$ che, con $x \to -x$, diventa

$\varphi(x) = (2\lambda - 1)\varphi(-x)$ ovvero

$\varphi(x) = (2\lambda-1)^2\varphi(x) \Rightarrow (2\lambda - 1)^2 = 1 < \begin{array}{l}\boxed{\lambda = 0} \\ \boxed{\lambda = 1}\end{array}$

$\underline{\lambda = 0} \to \mathcal{L}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi(x) + \varphi(-x) = 0$

$\varphi(-x) = -\varphi(x)$ funzioni <u>dispari</u>

$\underline{\lambda = 1} \to \mathcal{L}\varphi = \varphi \Rightarrow \varphi(x) + \varphi(-x) = 2\varphi(x)$

$\varphi(-x) = \varphi(x)$ funzioni <u>pari</u>

③ $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x,1) = x^3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \tau + C_1 \\ y = \frac{1}{3}(\tau + C_1)^3 + C_2 \\ z = C_3 \end{cases}$ $\quad y = \frac{x^3}{3} + C_2$

Cubiche su piani a z = cost.

$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = 1 \\ \frac{dy}{d\tau} = x^2 \\ \frac{dz}{d\tau} = 0 \end{cases}$ $\quad \Gamma: \begin{cases} x = s \\ y = 1 \\ z = s^3 \end{cases} \to \begin{cases} x(\tau, s) = \tau + s \\ y(\tau, s) = \frac{1}{3}(\tau+s)^3 + 1 - \frac{s^3}{3} \\ z(\tau, s) = s^3 \end{cases}$

$y = \frac{x^3}{3} + 1 - \frac{s^3}{3}$

$s^3 = x^3 + 3(1-y)$

$$\boxed{z = u(x,y) = x^3 + 3(1-y)}$$

(4) (i) VEDI DISPENSE

(ii) $$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{-|x+vt|} + e^{-|x-vt|}\right) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} e^{-|\lambda|} \sin\lambda \, d\lambda$$

(a) $x > vt$: $x+vt>0$ e $x-vt>0$

$$u(x,t) = \frac{e^{-x}}{2}\left(e^{-vt} + e^{vt}\right) + \frac{e^{-x}}{4v}\left\{e^{vt}\left[\cos(x-vt) + \sin(x-vt)\right] - e^{-vt}\left[\cos(x+vt) + \sin(x+vt)\right]\right.$$

(b) $-vt < x < vt$: $x+vt>0$ e $x-vt<0$

$$u(x,t) = \frac{e^{-vt}}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right) - \frac{e^{-vt}}{4v}\left\{e^{x}\left[\sin(x-vt) - \cos(x-vt)\right] + e^{-x}\left[\sin(x+vt) + \cos(x+vt)\right]\right\}$$

(c) $x < vt$: $x+vt<0$ e $x-vt<0$

$$u(x,t) = \frac{e^{x}}{2}\left(e^{-vt} + e^{vt}\right) + \frac{e^{x}}{4v}\left\{e^{vt}\left[\sin(x+vt) - \cos(x+vt)\right] - e^{-vt}\left[\sin(x-vt) - \cos(x-vt)\right]\right\}$$