Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile
Anno Accademico 2009/2010
Fisica Matematica

Nome ....

N. Matricola ....   Ancona, 26 febbraio 2010

1. (7 punti) Illustrare la classificazione delle equazioni del second'ordine a derivate parziali, introducendo il problema di Cauchy e le curve caratteristiche.

2. (9 punti) Determinare la soluzione dell'equazione del prim'ordine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1-x)\,\frac{\partial u}{\partial x} = 1,$$

$-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$, con la condizione iniziale $u(x,0) = h(x)$, dove

$$h(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

3. (9 punti) Risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$

nel dominio $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq R^2\}$, con $u = 0$ sulla frontiera $\partial\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 = R^2\}$.

4. (8 punti) Determinare la soluzione dell'equazione delle onde con termine di sorgente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos x$$

nel dominio $-\infty < x < +\infty$, con la condizione iniziale $u(x,0) = \sin\,x$, $\partial u/\partial t(x,0) = 1+x$
.

2) $\frac{\partial u}{\partial t} + (1-x)\frac{\partial u}{\partial x} = 1$

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = 1 \\ \frac{dx}{d\tau} = 1-x \\ \frac{dz}{d\tau} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \tau \\ x(\tau) = 1 + (s-1)e^{-\tau} \\ z(\tau) = \tau + h(s) \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau = t \\ s = (x-1)e^{t} + 1 \\ u(x,t) = z(\tau,s) = t + h((x-1)e^{t}+1) \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$|(x-1)e^{t}+1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq (x-1)e^{t}+1 \leq 1, \quad -2 \leq (x-1)e^{t} \leq 0$$

$$\Rightarrow -2e^{-t} \leq x-1 \leq 0 \qquad 1-2e^{-t} \leq x \leq 1$$

$$u(x,t) = \begin{array}{lll} t+1 & \text{per} & 1-2e^{-t} \leq x \leq 1 \\ 0 & & x < 1-2e^{-t} \text{ e } x > 1 \end{array}$$

---

3) $\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$

$$u(r,\varphi) = \sum_n U_n(r) e^{in\varphi} \qquad 1 = \sum_n \delta_{n0} e^{in\varphi} \qquad \sum_n U_n(R) e^{in\varphi} = 0 \Rightarrow \boxed{U_n(R) = 0}$$

$$\Delta u = 1 \longrightarrow \sum_n \left\{ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rU_n') - \frac{n^2}{r^2}U_n - \delta_{n0} \right\} e^{in\varphi} = 0$$

$$\begin{cases} n = 0 \longrightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rU_0') - 1 = 0 \\ n \neq 0 \longrightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rU_n') - \frac{n^2}{r^2}U_n = 0 \end{cases}$$

$$(rU_0')' = r; \quad rU_0' = \frac{r^2}{2} + C \qquad U_0' = \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \Rightarrow C = 0$$

$$U_0 = \frac{r^2}{2} + C_2 \qquad U_0(R) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{R^2}{2} \quad U_0(r) = \frac{r^2 - R^2}{2}$$

$$U_n(r) = A_n r^n \quad U_n(R) = 0 \Rightarrow A_n = 0 \quad n \neq 0$$

$$u(r,\varphi) = \frac{r^2 - R^2}{2}$$

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos x \qquad -\infty < x < +\infty \qquad u(x,0) = \sin x$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 + x$

$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t)$

$-v^2 u_s'' = \cos x \qquad \boxed{u_s(x) = \cos \frac{x}{v}}$

$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad v(x,t) = \frac{1}{2}\left[h(x+vt) + h(x-vt)\right] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \phi(\lambda)\, d\lambda$

Con $h(x) = \sin x - \cos \frac{x}{v} \qquad \phi(x) = 1 + x$

$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+vt) + \sin(x-vt) - \cos\frac{x+vt}{v} - \cos\frac{x-vt}{v}\right] +$

$+ \frac{1}{2v}\left[\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right]_{x-vt}^{x+vt} = 2\sin x \cos vt - 2\cos\frac{x}{v}\cos t +$

$+ \frac{1}{\cancel{2v}}\left[\cancel{2v}t + \frac{\cancel{2}xvt}{2}\right] =$

$= 2\left[\sin x \cos vt - \cos\frac{x}{v}\cos t\right] + t\left(1 + \frac{x}{2}\right)$