Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile
Anno Accademico 2009/2010
Fisica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 23 gennaio 2010

1. (7 punti) Discutere il problema di Cauchy per le equazioni quasi lineari del prim'ordine, introducendo i concetti di superficie integrale, direzioni e curve caratteristiche e la loro relazione.

2. (9 punti) Determinare la soluzione dell'equazione di Laplace nel dominio semi-infinito del piano (x, y) racchiuso dalle rette di equazione $y = x$, $y = x + L\sqrt{2}$ e $y = -x$, le condizioni al contorno $u(x, -x) = h(x)$, $u(x, x) = u(x, x + L\sqrt{2}) = 0$ e $u(x, y) \to 0$ all'infinito.

   Suggerimento: fare un grafico preliminare del dominio e determinare un'opportuna trasformazione di variabili.

3. (9 punti) Determinare la soluzione dell'equazione del calore con termine di sorgente,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S(x)$$

   nel dominio $0 \le x \le L$, dove

$$\begin{aligned} S(x) &= S_0, \quad \cancel{-\frac{L}{4} \le x \le \frac{L}{4}} \quad \frac{L}{4} \le x \le \frac{3}{4}L \\ &= 0, \quad \text{altrimenti} \end{aligned}$$

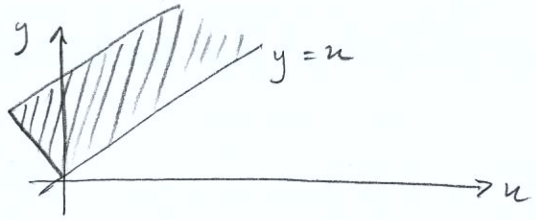
   condizioni al contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$, di continuità della soluzione e della sua derivata in $x = \pm L/4$ e condizione iniziale $u(x, 0) = f(x)$.

4. (8 punti) Determinare la soluzione dell'equazione delle onde con termine di sorgente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C\,\sin x$$

   nel dominio $0 \le x \le 2\pi$, con le condizioni al contorno $u(0, t) = u(2\pi, t) = 0$ e la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$.

(2) Dominio:



$$\xi = (x+y)/\sqrt{2}$$
$$\eta = (x-y)/\sqrt{2}$$
$$u(x,y) = U(\xi,\eta)$$

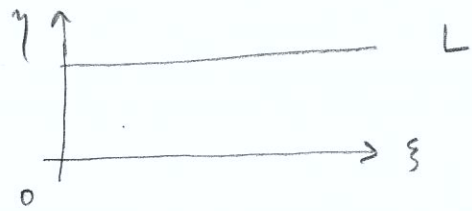
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)/\sqrt{2}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)/\sqrt{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right)/2; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right)/2$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \qquad \Delta u = 0 \iff \Delta U = 0$$

$$u(x,x) = U(\xi,0) \qquad u(x, x+L\sqrt{2}) = U(\xi, L)$$

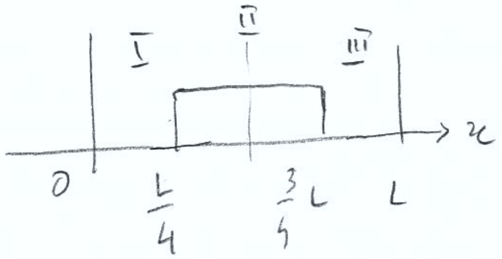
$$u(x,-x) = U(0,\eta)$$



etc.

---

(3) $u(x,t) = u_s(x) + v(x,t)$



$$k u_s'' + S(x) = 0$$

Per $x \in [0, \frac{L}{4})$ e $(\frac{3}{4}L, L]$

$$u_s'' = 0 \qquad u_s(x) = \begin{cases} A_I x + B_I \\ A_{III} x + B_{III} \end{cases}$$

per $\frac{L}{4} \le x \le \frac{3}{4}L$

$$u_s'' = -\frac{S_o}{k} \qquad u_s(x) = -\frac{S_o x^2}{2k} + A_{II} x + B_{II}$$

Continuità di u_s e u_s' in $x = \frac{L}{4}$ e $\frac{3}{4}L$:

$$\begin{cases} A_I \frac{L}{4} + B_I = -\frac{S_o L^2}{32k} + A_{II}\frac{L}{4} + B_{II} \\ A_I = -\frac{S_o}{k}\frac{L}{4} + A_{II} \\ A_{III}\frac{3L}{4} + B_{III} = -\frac{9 S_o^2}{32k} + \frac{3L}{4}A_{II} + B_{II} \\ A_{III} = -\frac{S_o}{k}\frac{3}{4}L + A_{II} \end{cases}$$

C.C. in $x=0$ e $x=L$

$$\begin{cases} B_I = 0 \\ A_{III} L + B_{III} = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema fornisce le costanti $A_I, B_I, A_{II}, B_{II}, A_{III}, B_{III}$

La soluzione omogenea è la solita

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, e^{-t/\tau_n} \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad \text{etc.}$$

---

(4) $u(x,t) = u_s(x) + v(x,t)$

$-v^2 u_s'' = C \sin x \qquad u_s' = + \frac{C}{v^2} \cos x + A$

$u_s(x) = \frac{C}{v^2} \sin x + Ax + B \qquad \text{c.c.} \begin{cases} B = 0 \\ A \cdot 2\pi = 0 \end{cases} \qquad A = B = 0$

$u_s(x) = \frac{C}{v^2} \sin x$

$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right\} \sin \frac{n x}{2} \qquad \omega_n = \frac{n v}{2}$