CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2008/09: Appello del 21/3/2009

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 21 marzo 2009

1. (9 punti) È data l'equazione del second'ordine iperbolica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

nel dominio $-\infty < x < +\infty$ con le condizioni iniziali

$$u(0,y) = h(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \phi(y).$$

Determinare la trasformazione canonica e trovarne la soluzione con la formula di d'Alembert.

2. (8 punti) Si consideri l'operatore

$$(\mathcal{L}\,\varphi)(x) = \frac{\varphi(x) + \alpha\,\varphi(-x)}{2}$$

definito sulle funzioni reali, continue ed integrabili nell'intervallo $(-1,1)$. Dimostrare che è un operatore lineare e determinare per quali valori di α è autoaggiunto. Determinarne quindi autovalori ed autofunzioni per $\alpha = -1$.

3. (8 punti) Enunciare e dimostrare il Principio di Massimo per l'equazione di Laplace. Si consideri quindi la funzione

$$f(x,y) = e^{\alpha\,x + \beta\,y}$$

definita nel dominio $D = \{(x,y) : 0 \le x \le L,\, 0 \le y \le x\}$ con α e β reali.

(i) Dove si trova il massimo della funzione e perchè? Si può dire qualcosa riguardo al minimo?

(ii) Per quali valori di α e β la funzione $f(x,y)$ è soluzione dell'equazione di Laplace?

(iii) Rispondere alle due domande precedenti nel caso in cui α e β siano complessi.

4. (8 punti) Introdurre i concetti generali riguardanti le equazioni quasi-lineari del prim'ordine, in particolare di superficie integrale, direzioni caratteristiche e curve caratteristiche; impostare quindi il problema di Cauchy per l'esistenza ed unicità delle soluzioni.

1) $b^2 - ac = 9$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2 \pm 3}{1} = \begin{cases} -1 \\ 5 \end{cases}$ $\qquad \begin{matrix} y + x = C_1 \\ y - 5x = C_2 \end{matrix}$

$$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = 5x - y \end{cases} \implies \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad U(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

$$u(x,y) = F(x+y) + G(5x-y)$$

$$\begin{cases} u(0,y) = F(y) + G(-y) = h(y) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = F'(y) + 5G'(-y) = \phi(y) \end{cases} \qquad \begin{cases} F'(y) - G'(-y) = h'(y) \\ F'(y) + 5G'(-y) = \phi(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G'(-y) = \frac{\phi(y) - h'(y)}{6} \\ F'(y) = \frac{\phi(y) + 5h'(y)}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} G'(y) = \frac{\phi(-y) - h'(-y)}{6} \\ F'(y) = \frac{\phi(y) + 5h'(y)}{6} \end{cases}$$

$$G(y) = \frac{h(y) + \int_0^y \phi(-\lambda)\,d\lambda}{6} \qquad F(y) = \frac{5h(y) + \int_0^y \phi(\lambda)\,d\lambda}{6}$$

$$u(x,y) = \frac{5h(x+y) + \int_0^{x+y} \phi(\lambda)\,d\lambda}{6} + \frac{h(5x-y) + \int_0^{5x-y} \phi(-\lambda)\,d\lambda}{6}$$

---

2) $$(\varphi, \mathcal{L}\psi) = \int_{-1}^{1} \varphi(x) \frac{\psi(x) + \alpha\psi(-x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{ \int_{-1}^{1} \varphi(x)\psi(x)\,dx + \alpha \int_{-1}^{1} \varphi(x)\psi(-x)\,dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \int_{-1}^{1} \varphi(x)\psi(x)\,dx + \alpha \int_{-1}^{1} \psi(x)\varphi(-x)\,dx \right\} = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x) + \alpha\varphi(-x)}{2}\psi(x)\,dx = (\mathcal{L}\varphi, \psi)$$

$\alpha = -1$: $\quad \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2} = \lambda\varphi(x)$ $\qquad \begin{cases} (1-2\lambda)\varphi(x) - \varphi(-x) = 0 \\ (1-2\lambda)\varphi(-x) - \varphi(x) = 0 \end{cases}$ $\quad (x \to -x)$

$$\begin{cases} (1-2\lambda)\varphi(x) - \varphi(-x) = 0 \\ \varphi(x) - (1-2\lambda)\varphi(-x) = 0 \end{cases} \qquad (1-2\lambda)^2 - 1 = 0 \qquad 1 - 2\lambda = \pm 1$$

$\lambda = 1$ e $\lambda = 0$

$\lambda = 1 \longrightarrow \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2} = \varphi(x) \implies \varphi(x) + \varphi(-x) = 0$ funzioni dispari

$\lambda = 0 \longrightarrow \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2} = 0 \implies \varphi(-x) = \varphi(x)$ funzioni pari

3) $\Delta f = (\alpha^2+\beta^2)\, e^{\alpha x+\beta y} \geqslant 0$ ($\Delta f = 0$ solo se $\alpha=\beta=0$)

(i) Quindi il massimo sta sulla frontiera. Nulla si può dire del minimo

(ii) $\Delta f = 0 \iff \alpha=\beta=0$ cioè $f(x,y)=1$

(iii) $\alpha^2+\beta^2$ può essere negativo. Per $\beta = \pm i\alpha$ abbiamo $\Delta f \equiv 0$ su tutto il dominio.
