CORSO di FISICA-MATEMATICA

per il

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2008/09: Appello del 17/12/2008

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 17 dicembre 2008

1. (8 punti) È data l'equazione del calore
$$\frac{\partial u}{\partial t} - K\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
con le condizioni al contorno $u(0,t) = U_0$ e $u(L,t) = U_L$ e con la condizione iniziale $u(x,0) = h(x)$. Trattare in dettaglio il metodo risolutivo basato sullo sviluppo in autofunzioni ed applicarlo quindi al caso particolare
$$h(x) = 0$$

2. (8 punti) Classificare l'equazione del second'ordine
$$3\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2\,\lambda\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinare quindi le variabili canoniche nel caso $\lambda = -5/3$.

3. (7 punti) È data l'equazione del prim'ordine
$$\sin y\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$
$-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Determinarne le curve caratteristiche e trovarne la soluzione $u(x,y)$ con la condizione iniziale $u(x,0) = e^{-x}$. È la soluzione definita in tutto il piano (x,y)?

4. (7 punti) Date le funzioni
$$f(x) = \sin x \qquad g(x) = e^{-|x|},$$
calcolare le trasformate di Fourier $\widehat{f}(k)$ ed $\widehat{g}(k)$. Utilizzando le proprietà delle trasformate di Fourier ed il teorema di convoluzione, calcolare la trasformata di Fourier della funzione
$$h(x) = e^{-|x-a|}\,\sin x$$

5. (Domande supplementari): a) Risolvere l'esercizio 4 con
$$g(x) = e^{-x^2/2} \qquad \text{ed} \qquad h(x) = e^{-(x-a)^2/2}$$
b) In quale regione del piano sarebbe definita la soluzione se la condizione di Cauchy nell'esercizio 3 fosse data sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$?

1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ $u(x,t) = u_s(x) + v(x,t)$ $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-t/\tau_n} \sin k_n x$

$u(0,t) = U_0$; $u(L,t) = U_L$ $u_s'' = 0$ $k_n = \dfrac{n\pi}{L}$ $\tau_n = \dfrac{1}{k k_n^2}$

$u(x,0) = h(x)$ $u_s(x) = Ax + B$

$u_s(0) = U_0 \rightarrow B = U_0$ $u_s(L) = U_L \longrightarrow A = \dfrac{U_L - U_0}{L} \Rightarrow u_s(x) = \dfrac{U_L - U_0}{L}x + U_0$

$v(x,0) = h(x) - u_s(x)$ $h(x) = 0 \longrightarrow v(x,0) = -\dfrac{U_L - U_0}{L}x - U_0$

$A_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L \left(-\dfrac{U_L - U_0}{L}x - U_0\right)\sin k_n x =$ $\int x \sin k_n x = \dfrac{\sin k_n x - k_n x \cos k_n x}{k_n^2}$

$= -\dfrac{2}{L}\dfrac{U_L - U_0}{L}\left[-\dfrac{k_n L \cos k_n L}{k_n^2}\right] = \dfrac{2(U_L - U_0)}{n\pi}\cos n\pi = (-1)^n \dfrac{2(U_L - U_0)}{n\pi}$

---

2) $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2\lambda\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\Delta = b^2 - ac = y^2 + 3y^2\lambda = (1+3\lambda)y^2$

$\lambda = -\dfrac{1}{3}$ oppure $y = 0$ $\forall\lambda$ $\Delta = 0$ PARAB.

$\lambda > -\dfrac{1}{3}$ $\Delta > 0$ IPERB.

$\lambda < -\dfrac{1}{3}$ $\Delta < 0$ ELLITTICA

$\lambda = -\dfrac{5}{3}$ EQ. ELLITTICA

$\Delta = -4y^2$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \pm \sqrt{-4y^2}}{3}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \pm 2i|y|}{3} = (y>0) \begin{cases} \frac{1+2i}{3}y \\ \frac{1-2i}{3}y \end{cases} = (y<0) \begin{cases} \frac{1-2i}{3}y \\ \frac{1+2i}{3}y \end{cases}$

$$y(x) = \begin{cases} \begin{cases} C_1 e^{\frac{1+2i}{3}x} \\ C_2 e^{\frac{1-2i}{3}x} \end{cases} (y>0) \\ \begin{cases} C_1 e^{\frac{1-2i}{3}x} \\ C_2 e^{\frac{1+2i}{3}x} \end{cases} (y<0) \end{cases}$$

$$\xi = \begin{cases} y e^{-\frac{1+2i}{3}x} & y>0 \\ y e^{-\frac{1-2i}{3}x} & y<0 \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} y e^{-\frac{1-2i}{3}x} & y>0 \\ y e^{-\frac{1+2i}{3}x} & y<0 \end{cases}$$

$$w = \frac{\xi+\eta}{2} = \begin{cases} y e^{-\frac{x}{3}} \cos\frac{2}{3}x, & y>0 \\ y e^{-\frac{x}{3}} \cos\frac{2}{3}x, & y<0 \end{cases}$$

$$z = \frac{\xi-\eta}{2i} = \begin{cases} -y e^{-\frac{x}{3}} \sin\frac{2}{3}x, & y>0 \\ y e^{-\frac{x}{3}} \sin\frac{2}{3}x, & y<0 \end{cases}$$

3) $\sin y \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \sin y \\ \dfrac{dy}{d\tau} = 1 \\ \dfrac{dz}{d\tau} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \tau + C_1 \\ \dfrac{dx}{d\tau} = \sin(\tau + C_1) \to x = -\cos(\tau + C_1) + C_2 \\ z = C_3 \end{cases}$$

$u(x,0) = e^{-x}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = e^{-s} \end{cases} \to \begin{cases} y = \tau \\ x = -\cos\tau + (1+s) \\ z = e^{-s} \end{cases}$$

$s = x + \cos y - 1$

$z = e^{-[x + \cos y - 1]}$

$u(x,y) = e^{1 - x - \cos y}$

---

4) $f(x) = \sin x$ $\quad \hat{f}(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \sin x \, e^{ikx} \, dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} e^{ikx} \, dx =$

$$= \frac{1}{2i} \sqrt{2\pi} \left[\delta(k+1) - \delta(k-1) \right]$$

$g(x) = e^{-|x|}$ $\quad \hat{g}(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{x + ikx} dx + \int_0^{\infty} e^{-x + ikx} dx \right\} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{e^{(1+ik)x}}{1+ik} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-(1-ik)x}}{-(1-ik)} \Big|_0^{\infty} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{1+ik} + \frac{1}{1-ik} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+k^2}$$

$g_a(x) = e^{-|x-a|} = g(x-a)$ $\quad \hat{h}(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk' \, \hat{g}_a(k') \hat{f}(k-k')$

$g_a(k') = \hat{g}(k) e^{-ika}$ $\quad \hat{h}(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk' \, e^{-ik'a} \dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \dfrac{\cancel{2}}{1+k'^2} \dfrac{\cancel{\sqrt{2\pi}}}{\cancel{2}i} \left[\delta(k-k'+1) - \delta(k-k'-1) \right] =$

$$= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{e^{-i(k+1)a}}{1+(k+1)^2} - \frac{e^{-i(k-1)a}}{1+(k-1)^2} \right\}$$