CORSO di FISICA-MATEMATICA

per il

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2008/09: Appello del 12/12/2008

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 12 dicembre 2008

1. (8 punti) È data l'equazione del calore con termine di sorgente

$$\frac{\partial u}{\partial t} - K\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S(x)$$

con le condizioni al contorno $u(0,t) = u(L,t) = 0$ e con la condizione iniziale $u(x,0) = h(x)$. Trattare in dettaglio il metodo risolutivo basato sullo sviluppo in autofunzioni ed applicarlo quindi al caso particolare

$$S(x) = S_0\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \qquad h(x) = 0$$

2. (8 punti) Classificare l'equazione del second'ordine

$$\lambda\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\,x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinare quindi le caratteristiche e le variabili canoniche nel caso $\lambda = 1$.

3. (7 punti) È data l'equazione del prim'ordine

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \cos x\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Determinarne le curve caratteristiche e trovarne la soluzione $u(x,y)$ con la condizione iniziale $u(0,y) = e^{-y}$. È la soluzione definita in tutto il piano (x,y)?

4. (7 punti) Stabilire quali delle seguenti funzioni ammettono trasformata di Fourier (anche nel senso delle distribuzioni) e quali non la ammettono, giustificando la risposta:

$$f_1(x) = e^{x} \qquad f_2(x) = e^{-x} \qquad f_3(x) = e^{-|x|}$$
$$f_4(x) = e^{x}\sin x \qquad f_5(x) = e^{-|x|}\sin x$$

Per quelle che l'ammettono, calcolarne quindi la trasformata.

5. (Domande supplementari): a) Determinare le variabili canoniche ed eseguire la trasformazione in forma canonica nell'equazione dell'esercizio 2 nel caso $\lambda = 0$. b) Cosa cambierebbe nell'ultimo punto dell'esercizio 3 se la condizione di Cauchy fosse data sulla retta $y = 0$?

1) $u(x,t) = u_s(x) + v(x,t)$

$u_s(0) = u_s(L) = 0$

$-Ku_s'' = S_0\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$

$c_2 = 0$

$-Ku_s' = S_0\left[x - \frac{x^3}{3L^2}\right] + c_1$

$S_0\left(\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{12}\right) + c_1 L = 0$

$-Ku_s = S_0\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12L^2}\right] + c_1 x + c_2$

$\frac{5}{12} S_0 L^2 + c_1 L = 0 \qquad c_1 = -\frac{5}{12} S_0 L$

$u_s = -\frac{S_0}{K}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12L^2}\right) - \frac{5}{12}\frac{S_0 L}{K}$

$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-t/\tau_n} \sin\frac{n\pi x}{L}$

$v(x,0) = h(x) - u_s(x) = -u_s(x)$

$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L (-u_s(x)) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$

---

2) $b^2 - ac = x^2 + 3\lambda x^2 = (1+3\lambda)x^2$

per $x=0$ parabolica

per $x \neq 0$: $\lambda > -\frac{1}{3}$ iperbolica

$\lambda = -\frac{1}{3}$ parabolica

$\lambda < -\frac{1}{3}$ ellittica

$\lambda = 1$ (iperbolica)

$\downarrow$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x \pm \sqrt{4x^2}}{1} = x \pm 2|x|$

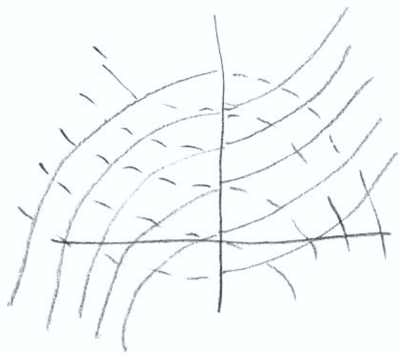
$= \begin{cases} 3x,\ -x, & x>0 \\ -x,\ 3x, & x<0 \end{cases}$

$x>0$: $y = \frac{3}{2}x^2 + c_1$ $\quad \begin{cases} \xi = 3x^2 - 2y \\ \eta = x^2 + 2y \end{cases}$

$y = -\frac{x^2}{2} + c_2$

$x<0$: $y = -\frac{x^2}{2} + c_1$ $\quad \begin{cases} \xi = x^2 + 2y \\ \eta = 3x^2 - 2y \end{cases}$

$y = \frac{3}{2}x^2 + c_2$



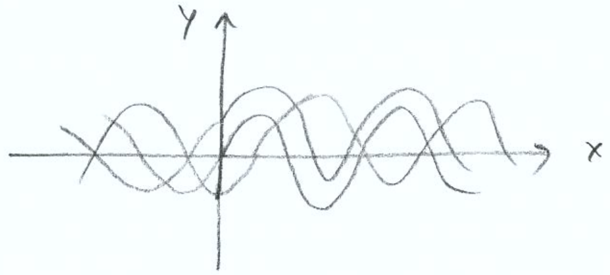
3)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau}=1 \\[2mm] \dfrac{dy}{d\tau}=\cos x \\[2mm] \dfrac{dz}{d\tau}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\tau+C_1 \\[2mm] \dfrac{dy}{d\tau}=\cos(\tau+C_1) \\[2mm] z=C_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\tau+C_1 \\ y=\sin(\tau+C_1)+C_2 \\ z=C_3 \end{cases}$$

Dato iniziale

$$\begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=e^{-s} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x=\tau \\ y=\sin\tau+s \\ z=e^{-s} \end{cases}$$



$$s=y-\sin x \qquad z=e^{-(y-\sin x)} \qquad u(x,y)=e^{\sin x-y}$$

4) f_1, f_2 ed f_4 non ammettono trasf. di Fourier perché divergono all'infinito

$$\hat{f}_3(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|-ikx}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{(1-ik)x}\,dx+\int_0^{\infty} e^{-(1+ik)x}\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{1-ik}+\frac{-1}{-(1+ik)}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2}{1+k^2}$$

$$\hat{f}_5(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\sin x\, e^{-ikx}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\,e^{-ikx}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{0}\left[e^{(1+i-ik)x}-e^{(1-i-ik)x}\right]dx+\int_0^{\infty}\left[e^{-(1-i+ik)x}-e^{-(1+i+ik)x}\right]dx\right.$$

$$=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{1+i-ik}-\frac{1}{1-i-ik}+\frac{1}{1-i+ik}-\frac{1}{1+i+ik}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{2}{1+(1-k)^2}-\frac{2}{1+(1+k)^2}\right\}$$

5) Per $\lambda=0$ l'equazione è iperbolica; bisogna scambiare x ed y