CORSO di FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

A.A. 2008/09: Appello del 10/1/2009

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 10 gennaio 2009

1. (8 punti) Determinare la soluzione dell'equazione di Laplace nel dominio bidimensionale $\mathcal{D} = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq a\}$ con le condizioni al contorno di Dirichlet $u(x, 0) = 0$, $u(x, a) = e^{-|x|}$, $|u(x, y)| \to 0$ per $|x| \to \infty$. (*Suggerimento: utilizzare la trasformata di Fourier rispetto ad* x)

2. (8 punti)

   (i) Dimostrare che gli autovalori di un operatore $\mathcal{L}$ antisimmetrico (cioè tale che $(\mathcal{L}\varphi, \psi) = -(\varphi, \mathcal{L}\psi)$ per ogni φ, ψ nel dominio dell'operatore) sono immaginari puri;

   (ii) si consideri l'operatore
   $$(\mathcal{L}\,\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$$
   definito sulle funzioni continue nell'intervallo $[0, L]$. Dimostrare che è un operatore lineare. Determinare le condizioni sul dominio dell'operatore affinchè questi sia antisimmetrico.

   Domanda supplementare. Nel caso di operatore antisimmetrico, calcolare autovalori ed autofunzioni; per questo, si faccia l'ipotesi aggiuntiva che le funzioni nel dominio siano derivabili).

3. (6 punti)

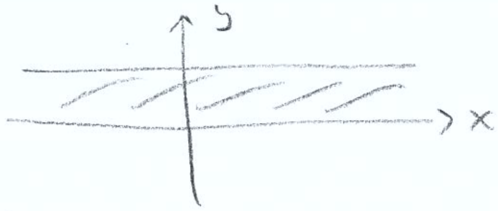
   (i) Enunciare e dimostrare il Principio di Massimo per l'equazione di Laplace;

   (ii) si consideri la funzione
   $$u(x, y) = A\,e^{\alpha x + \beta y} + B\,e^{\gamma x + \delta y}$$
   definita sul dominio $\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ con $A, B, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ numeri reali con $A \geq 0$ e $B \geq 0$. È soluzione dell'equazione di Laplace? Verifica le condizioni del Principio di Massimo?

   Domanda supplementare: Come si devono modificare le condizioni del problema affinchè la funzione $u(x, y)$ *sopra definita sia soluzione reale dell'equazione di Laplace?*

4. (8 punti) Determinare la soluzione dell' equazione di Klein-Gordon con carico
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2\,u = U_0\,e^{-x/L},$$
   nel dominio finito $0 \leq x \leq L$ con le condizioni al contorno $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 1$ e le condizioni iniziali
   $$u(x, 0) = h(x)$$
   $$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$



$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{u}_k(y)\, e^{ikx}\, dk$$

$$\hat{u}_k(y) = A(k) e^{ky} + B(k) e^{-ky}$$

$$-k^2 \hat{u}_k(y) + \hat{u}_k''(y) = 0$$

$$u(x,0) = 0 \implies \hat{u}_k(0) = 0$$

$$u(x,a) = e^{-|x|} \implies \hat{u}_k(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-ik)x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+ik)x}\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(1-ik)x} \Big|_{-\infty}^{0}}{1-ik} + \frac{e^{-(1+ik)x} \Big|_{0}^{+\infty}}{-(1+ik)} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+k^2}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A e^{ka} + B e^{-ka} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{2}{1+k^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -A \\ A\left(e^{ka} - e^{-ka}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{2}{1+k^2} \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+k^2)\sinh ka}$$

etc.

2) $\begin{cases} \mathcal{L}\varphi_m = \lambda_m \varphi_m \\ \mathcal{L}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} (\varphi_n, \mathcal{L}\varphi_m) = (\varphi_n, \lambda_m \varphi_m) \\ (\mathcal{L}\varphi_n, \varphi_m) = (\lambda_n \varphi_n, \varphi_m) \end{cases}$

$\begin{cases} -(\mathcal{L}\varphi_n, \varphi_m) = \lambda_m^* (\varphi_n, \varphi_m) \\ (\mathcal{L}\varphi_n, \varphi_m) = \lambda_n (\varphi_n, \varphi_m) \end{cases}$ $\quad \boxed{n = m} \quad$ $\begin{cases} -(\mathcal{L}\varphi_n, \varphi_n) = \lambda_n^* (\varphi_n, \varphi_n) \\ (\mathcal{L}\varphi_n, \varphi_n) = \lambda_n (\varphi_n, \varphi_n) \end{cases}$

$0 = (\lambda_n^* + \lambda_n) \|\varphi_n\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n^* = -\lambda_n$

$\mathcal{L}\varphi = \int_0^x \varphi(t)\,dt \qquad \mathcal{L}(\varphi_1 + \varphi_2) = \int_0^x (\varphi_1 + \varphi_2)\,dt = \int_0^x \varphi_1\,dt + \int_0^x \varphi_2\,dt$

$(\mathcal{L}\varphi, \psi) = \int_0^L \int_0^x \varphi(t)\,dt\, \psi(x)\,dx = \int_0^x \varphi(t)\,dt \cdot \int_0^x \psi(t)\,dt \Big|_0^L - \int_0^L \varphi(x) \int_0^x \psi(t)\,dt\,dx$

$= -(\varphi, \mathcal{L}\psi) + \int_0^L \varphi(t)\,dt \int_0^L \psi(t)\,dt$

$\mathcal{L}$ antisimmetrico su $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ = { funzioni a media nulla }

$\mathcal{L}\varphi = \lambda\varphi \qquad \int_0^x \varphi(t)\,dt = \lambda \varphi(x) \; ; \; \varphi(x) = \lambda \varphi'(x)$

$\varphi(x) - \lambda\varphi'(x) = 0 \qquad \varphi(x) = \varphi(0)\, e^{x/\lambda} \qquad \int_0^L \varphi(x)\,dx = \varphi(0) \dfrac{e^{L/\lambda} - 1}{1/\lambda}$

$\Rightarrow e^{L/\lambda} - 1 = 0 \qquad e^{L/\lambda} = 1 \qquad L/\lambda = 2 i n \pi \qquad \boxed{\lambda = \dfrac{L}{2 i n \pi}}$

$\varphi_n(x) = e^{2 i n \pi x / L}$

3) $u(x,y) = A e^{\alpha x + \beta y} + B e^{\gamma x + \delta y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha A e^{\alpha x+\beta y} + \gamma B e^{\gamma x + \delta y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \beta A e^{\alpha x+\beta y} + \delta B e^{\gamma x+\delta y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 A e^{\alpha x+\beta y} + \gamma^2 B e^{\gamma x+\delta y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \beta^2 A e^{\alpha x+\beta y} + \delta^2 B e^{\gamma x+\delta y}$$

$$\Delta u = (\alpha^2+\beta^2) A e^{\alpha x+\beta y} + (\gamma^2+\delta^2) B e^{\alpha x+\beta y}$$

NON è SOLUZIONE

$\Delta u \geq 0$ verifica il Principio di Massimo

Affinché $\Delta = 0$, deve essere $\beta = i\alpha$ e $\delta = i\gamma$

Affinché sia reale, deve essere $B e^{\gamma x + i\gamma y} = (A e^{\alpha x + i\alpha y})^*$

$B e^{\gamma(x+iy)} = A^* e^{\alpha^*(x-iy)}$ cioè <u>mai</u>

4) $u(x,t) = u_s(x) + v(x,t)$

$u_s(0) = 0 \qquad u_s(L) = 1$

$-v u_s'' + \gamma^2 u_s = U_0 e^{-x/L}$

$u_p = a e^{-x/L}$

$-v \frac{a}{L^2} + \gamma^2 a = U_0 \qquad a = \frac{U_0}{\gamma^2 - v/L^2}$

$$u_s = A e^{(\gamma^2/v)x} + B e^{-(\gamma^2/v)x} + \frac{U_0}{\gamma^2 - v/L^2} e^{-x/L}$$

$u_s(0) = 0 \longrightarrow A + B + \frac{U_0}{\gamma^2 - v/L^2} = 0$

$u_s(L) = 1 \longrightarrow A e^{\gamma^2 L/v} + B e^{-\gamma^2 L/v} + \frac{U_0}{\gamma^2 - v/L^2} e^{-1}$

etc.

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t\right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$ etc.