Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile
Anno Accademico 2008/2009
Fisica Matematica

Nome ....

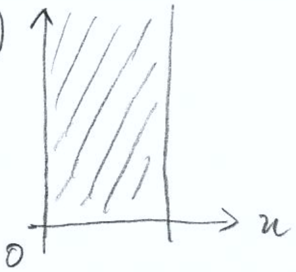
N. Matricola .... Ancona, 6 novembre 2009

1. (8 punti) Ricavare la formula di d'Alembert per la soluzione dell'equazione delle onde in una dimensione nel dominio $-\infty < x < +\infty$; partendo dalla formula di d'Alembert, definire quindi il dominio di dipendenza ed il cono d'influenza.

2. (9 punti) Determinare la soluzione dell'equazione di Laplace per la funzione incognita $u(x, y)$ nel dominio $\{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y < +\infty\}$ con le condizioni di Dirichlet $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$ e $u(x, y) \to 0$ per $y \to +\infty$. *(Suggerimento: utilizzare la separazione delle variabili.)*

3. (9 punti) Determinare la soluzione dell'equazione del calore con termine di sorgente,
$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x)$$
nel dominio $-\infty < x < +\infty$, con $\alpha(x) = \exp(-|x|)$, condizioni al contorno
$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x, t) = 0$$
e condizione iniziale $u(x, 0) = f(x) = \exp(-2\,|x|)$.

4. (8 punti) Determinare le curve caratteristiche dell'equazione quasi-lineare del prim'ordine
$$\frac{\partial u}{\partial t} + e^{-x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
e quindi risolverla con la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$.

2) 

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(0,y) = u(\pi, y) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad \lim\limits_{y \to +\infty} u(x,y) = 0 \quad (*) \end{cases}$$

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y) \rightarrow X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -k^2 \qquad \begin{cases} X'' + k^2 X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = n \qquad n = 1, 2, \dots \\ X_n(x) = \sin nx \end{cases}$$

$$Y'' - n^2 Y = 0 \qquad Y(y) = A_n e^{ny} + B_n e^{-ny}$$

$$A_n = 0 \quad \text{per la } (*)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-ny} \sin nx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \qquad B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

---

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = K \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x) \\ -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = f(x) = e^{-2|x|} \end{cases} \qquad \alpha(x) = e^{-|x|}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x,y) = 0 \quad (*)$$

<u>Sol. stazionaria</u>: $K u_s'' + e^{-|x|} = 0$ $\begin{cases} K u_s'' + e^{-x} = 0 \qquad x > 0 \\ K u_s'' + e^{x} = 0 \qquad x < 0 \end{cases}$

<u>$x > 0$</u>: $K u_s' - e^{-x} = C_1$

$K u_s + e^{-x} = C_1 x + C_2 \qquad u_s(x) = -\dfrac{e^{-x}}{K} + \dfrac{C_1 x + C_2}{K} \qquad C_1 = C_2 = 0$ per la $(*)$

<u>$x < 0$</u>: $K u_s' + e^{x} = C_1$

$K u_s + e^{x} = C_1 x + C_2 \qquad u_s(x) = -\dfrac{e^{x}}{K}$

<u>Insieme</u>: $u_s(x) = -\dfrac{e^{-|x|}}{K}$

Omogeneo : $u(x,t) \longrightarrow \hat{u}_k(t)$ $\dot{\hat{u}}_k + K k^2 \hat{u}_k = 0$

$$\hat{u}_k(t) = \hat{u}_k(0)\, e^{-Kk^2 t}$$

$$\hat{u}_k(0) = \hat{f}(k) - \hat{u}_s(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-2|x|} - \frac{e^{-|x|}}{K} \right) e^{-ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \left(e^{2x} - \frac{e^{x}}{K} \right) e^{-ikx}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} \left(e^{-2x} - \frac{e^{-x}}{K} \right) e^{-ikx}\, dx = \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left. \frac{e^{(2-ik)x}}{2-ik} \right|_{-\infty}^{0} - \left. \frac{e^{(1-ik)}}{1-ik} \right|_{-\infty}^{0} + \right.$$

$$\left. + \left. \frac{e^{-(2+ik)x}}{-(2+ik)} \right|_{0}^{+\infty} - \left. \frac{e^{-(1+ik)x}}{-(1+ik)} \right|_{0}^{+\infty} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{2-ik} - \frac{1}{1-ik} + \frac{1}{2+ik} - \frac{1}{1+ik} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{4}{4+k^2} - \frac{2}{1+k^2} \right\}$$

$$u(x,t) = u_s(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_k(0)\, e^{-Kk^2 t}\, dk$$

---

4) $\begin{cases} t = \tau \\ \dfrac{dx}{d\tau} = e^{-x} \\ z = \text{cost.} \end{cases}$ $\begin{cases} t = \tau \\ e^{x} dx = d\tau \\ z = \text{cost.} \end{cases}$ $\begin{cases} t = \tau \\ e^{x} = \tau + c \\ z = \text{cost.} \end{cases}$ $\begin{cases} t = \tau \\ e^{x} = \tau + e^{s} \\ z = h(s) \end{cases}$

$$e^{s} = e^{x} - t$$

$$s = \ln(e^{x} - t)$$

$$z = h[\ln(e^{x} - t)] \equiv u(x,t)$$