Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile
Anno Accademico 2008/2009
Fisica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 11 dicembre 2009

1. (8 punti)

   (i) Enunciare e dimostrare il Principio di Massimo per l'equazione di Laplace;

   (ii) per quali valori di α e β la funzione

   $$f(x,y) = e^{\alpha x} \cos y + e^{\beta y} \cos x$$

   è soluzione dell'equazione di Laplace?

2. (9 punti) Determinare la soluzione dell'equazione del telegrafo

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

   (con $0 < \lambda < 1$) nel dominio $0 \leq x \leq \pi$ con le condizioni al contorno $u(0,t) = 1$, $u(\pi,t) = 0$ e le condizioni iniziali $u(x,0) = 1 - x/\pi$, $\partial u/\partial t(x,0) = x$.

3. (9 punti) Determinare la soluzione dell'equazione del calore con termine di sorgente,

   $$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S(x)$$

   nel dominio $0 \leq x \leq \pi$, dove

   $$\begin{aligned} S(x) &= U_0, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ &= 0, \quad \pi \leq x \leq 2\pi, \end{aligned}$$

   condizioni al contorno $u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$, di continuità della soluzione e della sua derivata in $x = \pi$ e condizione iniziale $u(x,0) = f(x)$.

4. (8 punti) Determinare le curve caratteristiche dell'equazione quasi-lineare del prim'ordine

   $$\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

   e quindi risolverla con la condizione iniziale $u(x,0) = h(x)$.

1) (ii) $\Delta f = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos y - e^{\alpha x}\cos y + \beta^2 e^{\beta y}\cos x - e^{\beta y}\cos x =$

$$= (\alpha^2-1)e^{\alpha x}\cos y + (\beta^2-1)e^{\beta y}\cos x \qquad \boxed{\alpha,\beta = \pm 1}$$

2) $u_s''(x) = 0 \qquad u_s = Ax + B \qquad B = 1 \quad A = -\frac{1}{\pi} \qquad u_s(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$

$$\begin{cases} u(x,t) = u_s(x) + v(x,t) \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0; \quad v(x,0) = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = x \end{cases}$$

$v(x,t) = X(x)T(t) \qquad T''X - TX'' + 2\lambda T'X = 0$

$$\frac{T''}{T} - \frac{X''}{X} + 2\lambda\frac{T'}{T} = 0 \qquad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} + 2\lambda\frac{T'}{T} = -k^2$$

$$\begin{cases} X'' + k^2 X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \sin nx \qquad k = n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$T'' + 2\lambda T' + k^2 T = 0 \qquad T'' + 2\lambda T' + n^2 T = 0 \qquad \rho_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - n^2} = \lambda \pm i\,\omega_n$

$T_n(t) = e^{-\lambda t}(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t)$

$$v(x,t) = e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t\right]\sin nx$$

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin nx = 0 \quad \Rightarrow \quad A_n = 0 \quad \forall n$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = -\lambda\cancel{v(x,0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n\sin nx = x$$

$$\omega_n B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx = \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{n}(-1)^n + \frac{2}{\pi}\cancel{\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}} = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n} \qquad B_n = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n\sqrt{n^2-\lambda^2}}$$

3)
$$\begin{cases} u_s''(x) = -U_0 & 0 \le x \le \pi \\ u_s''(x) = 0 & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_s'(x) = -U_0 x + A \\ u_s(x) = -U_0 \frac{x^2}{2} + Ax + B \end{array}\right) \quad x < \pi$$

$u_s(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$x > \pi \begin{cases} u_s'(x) = C \\ u_s(x) = Cx + D \end{cases}$$

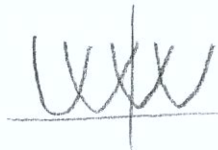
$$\begin{cases} 2\pi C + D = 0 \\ C = -U_0 \pi + A \\ C\pi + D = -U_0 \frac{\pi^2}{2} + A\pi \end{cases} \longrightarrow A, B, C = \dots$$

$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t)$ $\hookrightarrow$ $\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ e C.C. omogenee

$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-t/\tau_n} \sin \frac{nx}{2}$ $\quad v(x,0) = f(x) - u_s(x)$ etc.

4)
$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = 1 & t = \tau \\ \frac{dx}{d\tau} = \sqrt{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{\sqrt{x}} = d\tau \\ 2\sqrt{x} = \tau + c \end{cases}$$

$x = \frac{(t+c)^2}{4}$

parabole 

C.i.
$$\begin{cases} t = 0 \\ x = s \\ z = h(s) \end{cases}$$

$x(\tau, s) = \frac{(\tau + 2\sqrt{s})^2}{4}$

$\tau + 2\sqrt{s} = 2\sqrt{x}$ $\quad 2\sqrt{s} = 2\sqrt{x} - t$

$s = \frac{(2\sqrt{x} - t)^2}{4}$

$u(x,t) = h\left[\frac{(2\sqrt{x} - t)^2}{4}\right]$