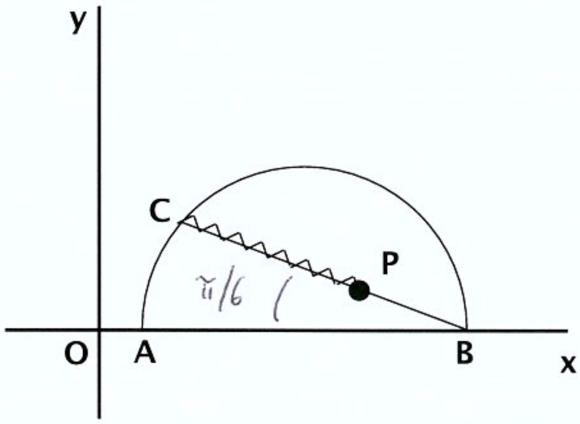
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2009/2010
Fisica Matematica

Nome ....

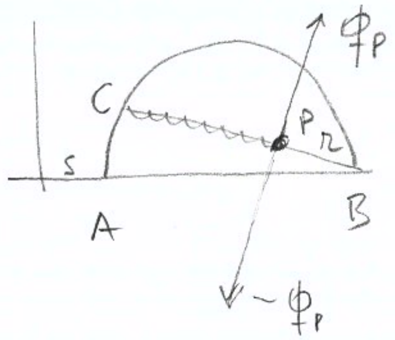
N. Matricola .... Ancona, 20 marzo 2010

1. (9 punti) Un sistema piano, che si muove nel piano verticale $O(x, y)$ è costituito da un semicerchio omogeneo pesante AB di massa M e raggio R, il cui diametro AB scorre senza attrito su una guida orizzontale, coincidente con l'asse Ox. Un punto materiale pesante P di massa m è libero di scorrere lungo la scanalatura BC mostrata in figura. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto P con il punto C del bordo, con l'angolo ABC uguale a $\pi/6$. Scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazioni di Newton e le equazioni cardinali della dinamica.



2. (7 punti) Enunciare e dimostrare il Teorema di Mozzi.

1) $\ell = 2$



$$P - O = \left[s + 2R - \frac{\sqrt{3}}{2} r \right] \hat{\imath} + \frac{r}{2} \hat{\jmath}$$

$$\underline{v}_P = \left(\dot{s} - \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{r} \right) \hat{\imath} + \frac{\dot{r}}{2} \hat{\jmath}$$

$$\underline{a}_P = \left(\ddot{s} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ddot{r} \right) \hat{\imath} + \frac{\ddot{r}}{2} \hat{\jmath}$$

$$C - P = \left(R\sqrt{3} - r \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\imath} + \frac{1}{2} \hat{\jmath} \right) \qquad \underline{\Phi}_P = \Phi_P \left(\frac{1}{2} \hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\jmath} \right)$$

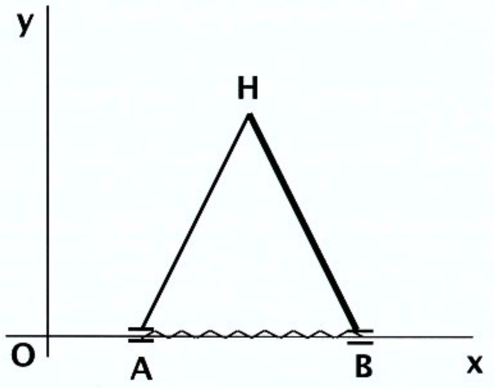
Semicerchio: $\quad M \ddot{s} \hat{\imath} = k(P - C) - Mg \hat{\jmath} + (\Phi_A + \Phi_B) \hat{\jmath} - \underline{\Phi}_P$

Punto P: $\quad m \underline{a}_P = -mg \hat{\jmath} + k(C - P) + \underline{\Phi}_P$

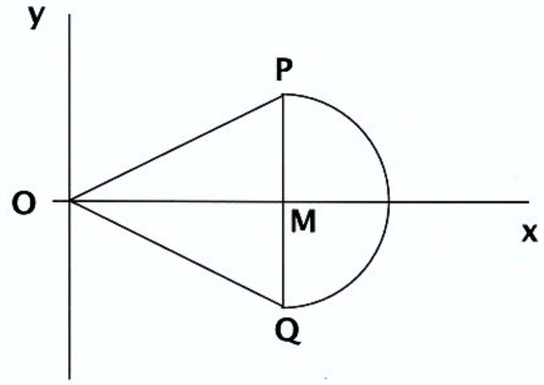
Sostituendo le espressioni ed eliminando $\underline{\Phi}_P$ si ha

$$\begin{cases} \ddot{s} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \dfrac{m}{m+M} \ddot{r} \\[2ex] \dfrac{m}{2} \left(1 + 3 \dfrac{M}{m+M} \right) \ddot{r} + 2kr = 2kR\sqrt{3} - mg \end{cases}$$

3. (9 punti) Due aste AH ed HB, di massa M e $2M$ rispettivamente ed ugual lunghezza L sono incernierate nell'estremo comune H, mentre gli estremi A e B sono vincolati a scorrere sull'asse x e sono collegati da una molla di costante elasica $k > 0$. Determinare le configurazioni di equilibrio utilizzando le equazioni cardinali della statica.

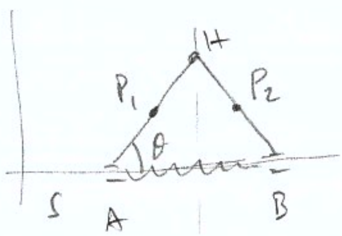


4. (7 punti) Calcolare la matrice d'inerzia di una lamina piana non omogenea di massa m ottenuta dall'unione di un semicerchio di diametro $PQ = 2L$ e massa m_1 con un triangolo isoscele di altezza $OM = h$ e massa m_2, rispetto al sistema solidale mostrato in figura.



---

3) $\ell = 2$



$$-Mg\,\hat{j} + 2kL\cos\theta\,\hat{i} + \Phi_A\,\hat{j} + \Phi_H = 0$$
$$-2Mg\,\hat{j} - 2kL\cos\theta\,\hat{i} + \Phi_B\,\hat{j} - \Phi_H = 0$$
$$(P_1 - A)\times(-Mg\,\hat{j}) + (H - A)\times\Phi_H = 0$$
$$(P_2 - B)\times(-2Mg\,\hat{j}) + (H - B)\times(-\Phi_H) = 0$$

$$\Phi_A = Mg - \Phi_{Hy}$$
$$2kL\cos\theta + \Phi_{Hx} = 0$$
$$\Phi_B = 2Mg + \Phi_{Hy}$$
$$2kL\cos\theta + \Phi_{Hx} = 0 \quad (3)$$
$$-\frac{MgL}{2}\cos\theta + (L\cos\theta\,\Phi_{Hy} - L\,\mathrm{sen}\,\theta\,\Phi_{Hx}) = 0$$
$$MgL\cos\theta + (L\cos\theta\,\Phi_{Hy} + L\,\mathrm{sen}\,\theta\,\Phi_{Hx}) = 0$$

$$\left(2L\,\Phi_{Hy} + \frac{MgL}{2}\right)\cos\theta = 0 \quad (1)$$
$$2L\Phi_{Hx}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{3}{2}MgL\cos\theta = 0 \quad (2)$$

(3) $\Phi_{Hx} = -2kL\cos\theta$

① $\cos\theta = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

② + ③ $\longrightarrow \frac{3}{2} Mg L^2 \cos\theta - 4kL \,\text{sen}\theta \cos\theta = 0$

$$L\cos\theta\left(\frac{3}{2}MgL - 4k\,\text{sen}\,\theta\right) = 0$$

$\cos\theta = 0$

$\text{sen}\theta = \frac{3Mg}{8kL}$ ⊛

⊛ deve essere $3Mg < 8kL$

$\theta = \theta_0, \ \pi - \theta_0 \qquad \theta_0 = \text{sen}^{-1}\frac{3Mg}{8kL}$

4) Per la simmetria materiale, la terna è principale d'inerzia.

$$I_{11} = I_{11}(\text{triangolo}) + I_{11}(\text{semicerchio}) =$$

$$= 2\int_0^h \sigma\, dx \int_0^{\frac{L}{h}x} dy\, y^2 + \frac{1}{4} m_1 L^2 = 2\sigma\int_0^h dx\, \frac{L^3}{3h^3}\, x^3 + \frac{1}{4} m_1 L^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{L^3}{\cancel{h^3}}\,\frac{m_2}{L\cancel{h}}\,\frac{\cancel{h^4}}{4} + \frac{1}{4} m_1 L^2 = \frac{1}{4}\left(m_1 + \frac{2}{3} m_2\right) L^2$$

$$I_{22} = 2\int_0^h \sigma\, dx \int_0^{\frac{L}{h}x} dy\, x^2 + \frac{1}{4} m_1 L^2 - m_1 d^2 + m_1 (h+d)^2 = 2\sigma \int_0^h dx\, \frac{L}{h} x^3 +$$

$$+ m_1\left[\frac{L^2}{4} + h^2 + 2hd\right] = \frac{2 m_2 \cancel{L}}{\cancel{L}\cancel{h}\,\cancel{h}}\,\frac{h^{\cancel{4}\,2}}{4} + m_1[\,\cdot\cdot\,] = \frac{1}{2} m_2 h^2 + m_1[\,\cdot\cdot\,]$$

dove σ è la densità del triangolo e d è la distanza del centro di massa del semicerchio dal suo centro:

$$d = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} \sigma\, d\varphi \int_0^R r\, dr\, r \sin\varphi =$$

$$= \frac{\sigma}{M}\,\frac{R^3}{3}\cdot 2 = \frac{4R}{3\pi}$$

Infine, $I_{33} = I_{11} + I_{22}$