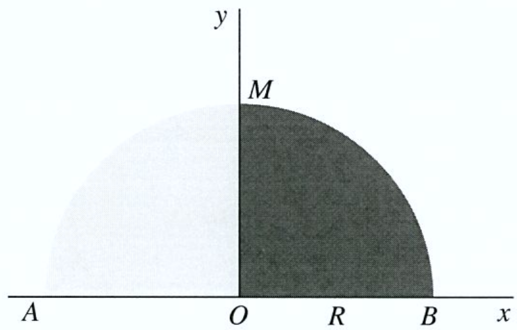
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2008/2009
Fisica Matematica

Nome:................................

N. matr.:................................ Ancona, 25 giugno 2009

1. *(i)* (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Huygens per il momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto ad una retta.

   (ii) (6 punti) Si consideri quindi il semicerchio non omogeneo di raggio R, massa m, diametro AB e centro l'origine (vedi figura), con il quarto di cerchio BMO avente densità doppia rispetto al quarto AMO. Calcolarne la matrice d'inerzia nel sistema di riferimento $O(x, y, z)$, con l'asse z perpendicolare al piano della figura. Determinare, infine, le direzioni principali d'inerzia con origine nel punto O sulla base delle simmetrie materiali.



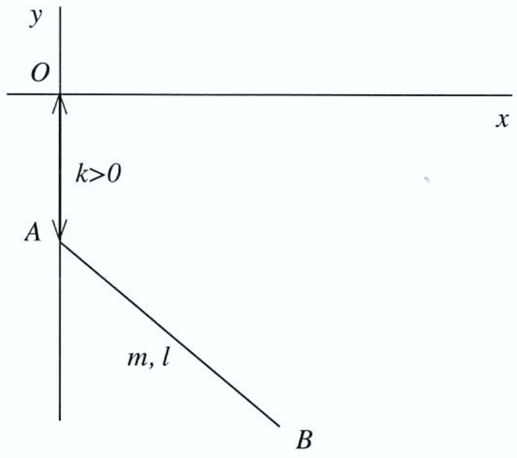
2. (8 punti)

   (i) (6 punti) Enunciare e dimostrare le formule di Poisson per la variazione nel tempo dei versori di un sistema solidale;

   (ii) (4 punti) formulare la definizione di moto rigido piano specificando correttamente cosa si intende per piano rappresentativo del moto e, utilizzando le formule di Poisson del punto precedente, dimostrare che in un moto rigido piano la velocità angolare ω è perpendicolare al piano rappresentativo del moto.

3. *(i)* (3 punti) Ricavare le equazioni cardinali della dinamica.

(ii) (7 punti) Nel piano verticale $O(x, y)$ si consideri quindi un'asta AB di massa m e lunghezza l, il cui estremo A è vincolato a scorrere senza attrito sull'asse y; sull'estremo A agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega A con l'origine O ed una forza viscosa di viscosità costante λ.

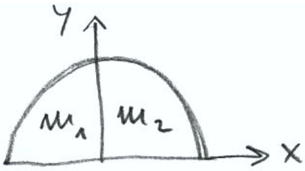


(a) Determinare il numero dei gradi di libertà del sistema e scegliere opportune coordinate lagrangiane;

(b) determinare tutte le forze che agiscono sull'asta, comprese le reazioni vincolari;

(c) scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.

1)



$$m_1 = \frac{m}{3} \qquad m_2 = \frac{2}{3} m$$

$$I_{11} = \sigma_2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, r\, r^2 \sin^2\varphi +$$

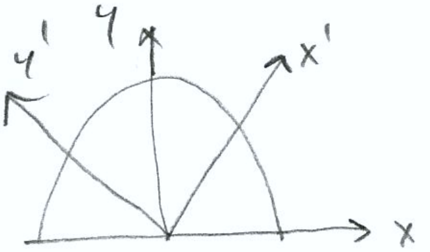
$$I_{33} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$+\sigma_1 \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r\, r^2 \sin^2\varphi = (\sigma_2 + \sigma_1) \frac{\pi}{4} \frac{R^4}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}(m_1 + m_2) R^2 = \frac{1}{4} m R^2 = I_{22}$$

$$I_{12} = -\sigma_2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, r\, r^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi - \sigma_1 \int_{\pi/2}^{\pi} \cdots =$$

$$= -\sigma_2 \frac{R^4}{4} \frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} - \sigma_1 \cdots = \left(-\frac{m_2}{\pi}\cdot\frac{1}{2} + \frac{m_1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\right) R^2 = -\frac{mR^2}{6\pi}$$

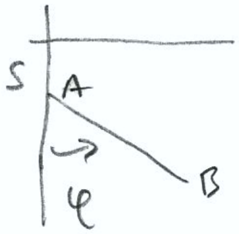


Direzioni principali a $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$

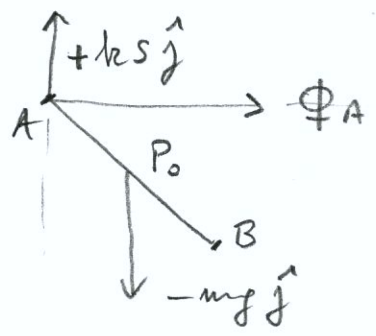
---

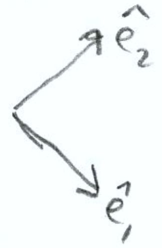
3) $l = 2$

(s, φ)



Forze





$$P_0 - O = \frac{l}{2} \operatorname{sen}\varphi\, \hat{\imath} - \left(s + \frac{l}{2}\cos\varphi\right)\hat{\jmath}$$

$$\underline{v}_0 = \frac{l}{2}\dot\varphi\cos\varphi\, \hat{\imath} - \left(\dot s - \frac{l}{2}\dot\varphi \operatorname{sen}\varphi\right)\hat{\jmath} \qquad \underline{\omega} = \dot\varphi\, \hat{k} = \dot\varphi\, \hat{e}_3$$

$$\underline{a}_0 = \frac{l}{2}\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2 \operatorname{sen}\varphi\right)\hat{\imath} - \left[\ddot s - \frac{l}{2}\left(\ddot\varphi \operatorname{sen}\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right)\right]\hat{\jmath}$$

$$\underline{K}(A) = m\,(P_0 - A) \times \underline{v}_A + \underline{\underline{I}}(A)\cdot\underline{\omega} = m\frac{l}{2}\left(\hat{\imath}\operatorname{sen}\varphi - \hat{\jmath}\cos\varphi\right) \times (-\dot s\, \hat{\jmath}) +$$

$$+ \frac{1}{3} m l^2 \dot\varphi\, \hat{k} = \left(-\frac{ml}{2}\dot s \operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{3} m l^2 \dot\varphi\right)\hat{k}$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{K}}(A) = m\,\underline{v}_0 \times \underline{v}_A + \underline{M}^{(e)}(A) \\ m\,\underline{a}_0 = \underline{R}^{(e)} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\left[-\dfrac{m\ell}{2}\left(\ddot{s}\operatorname{sen}\varphi+\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)+\dfrac{1}{3}m\ell^2\ddot{\varphi}\right]=-mg\dfrac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi & (1)\\[2ex]
m\dfrac{\ell}{2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi\right)=\Phi_A & (2)\\[2ex]
m\left[\ddot{s}-\dfrac{\ell}{2}\left(\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\right]=mg-ks & (3)
\end{cases}
$$

(1) e (3) sono le equazioni del moto

(2) dà la reazione vincolare