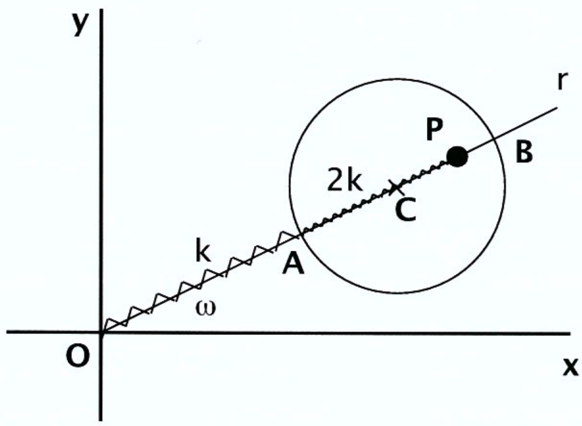
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2009/2010
Fisica Matematica

Nome ....
N. Matricola .... Ancona, 16 luglio 2010

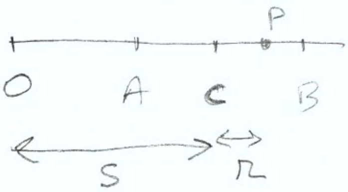
1. (9 punti) Un sistema piano, che si muove nel piano verticale $O(x, y)$ è costituito da un disco omogeneo pesante di massa M, centro C e raggio R, sul quale è praticata una scanalatura diametrale AB. Il diametro AB scorre senza attrito su una guida r che ruota attorno all'origine con velocità angolare ω. Un punto materiale pesante P di massa m è libero di scorrere lungo la scanalatura AB. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto A con l'origine O ed una seconda molla, di costante $2k$, collega il punto P con l'estremo A della scanalatura. Scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazioni di Newton e le equazioni cardinali della dinamica.



2. (7 punti) Enunciare e dimostrare le formule di Poisson per le derivate temporali dei versori di un sistema solidale.

---

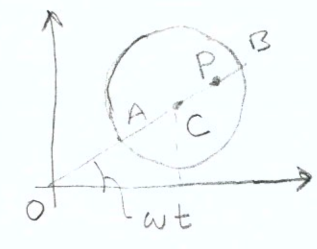
1) $\ell = 2$ (s, r)



$$C - O = s\hat{e}$$

$$\underline{v}_C = \dot{s}\hat{e} + \omega s\hat{n}$$

$$\underline{a}_C = \ddot{s}\hat{e} + 2\omega\dot{s}\hat{n} - \omega^2 s\hat{n}$$



$$\hat{e} = \hat{\imath}\cos\omega t + \hat{\jmath}\sin\omega t$$

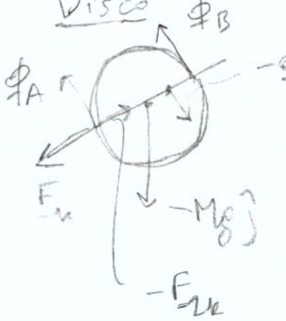
$$\hat{n} = -\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\omega t + \hat{\jmath}\cos\omega t$$

$$P - O = (s + r)\hat{e}$$

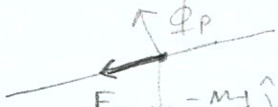
$$\underline{v}_P = (\dot{s} + \dot{r})\hat{e} + \omega(s + r)\hat{n}$$

$$\underline{a}_P = (\ddot{s} + \ddot{r})\hat{e} + 2\omega(\dot{s} + \dot{r})\hat{n} - \omega^2(s + r)\hat{n}$$

Disco



Punto



$$M\underline{a}_C = -Mg\hat{\jmath} + (\phi_A + \phi_B)\hat{n} + \underline{F}_k - \underline{F}_{2k} - \underline{\phi}_P$$

$$m\underline{a}_P = -mg\hat{\jmath} + \underline{\phi}_P + \underline{F}_{2k}$$

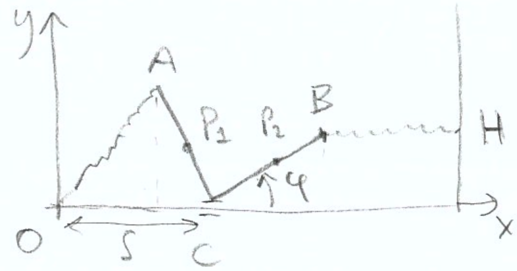
$\Phi_P = \Phi_P \hat{n} \qquad \underline{F}_k = -k(s-R)\hat{e} \qquad \underline{F}_{2k} = -2k(R+r)\hat{e}$

$$\begin{cases} M(\ddot{s} - \omega^2 s) = -Mg \sin\omega t - k(s-R) + 2k(R+r) & (1) \\ 2\omega M \dot{s} = -Mg\cos\omega t + (\Phi_A + \Phi_B) - \Phi_P & (2) \\ m(\ddot{s} + \ddot{r}) = -mg\sin\omega t - 2k(R+r) & (3) \\ m[2\omega(\dot{s}+\dot{r}) - \omega^2(s+r)] = -mg\cos\omega t + \Phi_P & (4) \end{cases}$$

(1)+(3) sono le equazioni del moto

(2)+(4) danno Φ_P e $\Phi_A + \Phi_B$

---

3) 

$l = 2 \qquad \underline{R}^{(e)} = 0$

$(s, \varphi) \qquad \underline{M}^{(e)}(C) = 0$

$A - O = (s - L \operatorname{sen}\varphi)\hat{\imath} + L\cos\varphi\,\hat{\jmath} \qquad C - O = s\hat{\imath}$

$B - O = (s + L\cos\varphi)\hat{\imath} + L\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\jmath} \qquad H - B = (2L - s - L\cos\varphi)\hat{\imath}$

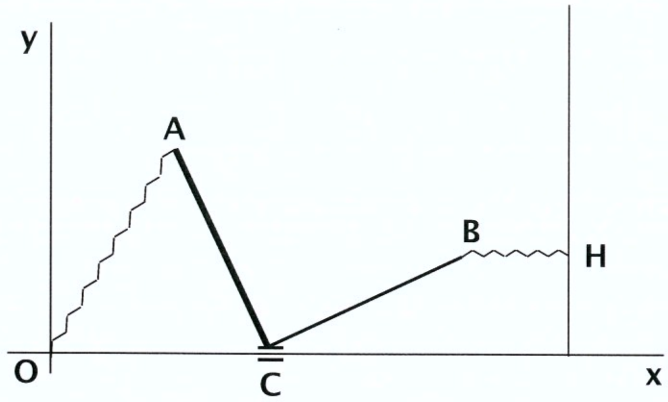
$\underline{R}^{(e)} = -3Mg\hat{\jmath} - k\{(s - L\operatorname{sen}\varphi)\hat{\imath} + L\cos\varphi\,\hat{\jmath}\} + k\{2L - s - L\cos\varphi\}\hat{\imath} + \Phi_c\hat{\jmath}$

$\underline{M}^{(e)}(C) = (A-C)\times[k(O-A)] + (P_1 - C)\times(-2Mg\hat{\jmath}) + (P_2 - C)\times(-Mg\hat{\jmath}) +$
$+ (B-C)\times[k(H-B)] = (\cancel{A-O} + O - C)\times[k(O-A)] + 2Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\varphi\,\hat{k}$
$- Mg\frac{L}{2}\cos\varphi\,\hat{k} - L(2L - s - L\cos\varphi)k\operatorname{sen}\varphi = \{ksL\cos\varphi + MgL(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi)$
$- L(2L - s - L\cos\varphi)k\operatorname{sen}\varphi\}$

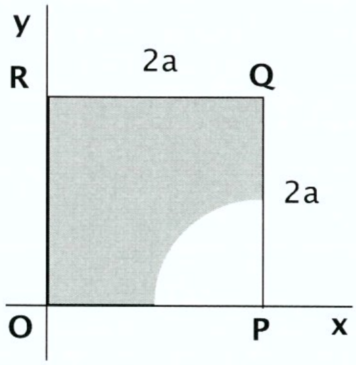
$$\begin{cases} s - L\operatorname{sen}\varphi - (2L - s - L\cos\varphi) = 0 \\ -3Mg - kL\cos\varphi + \Phi_c = 0 \\ ks\cos\varphi + Mg(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi) - k(2L - s - L\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi = 0 \end{cases}$$

$s = L + \frac{L}{2}(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi)$

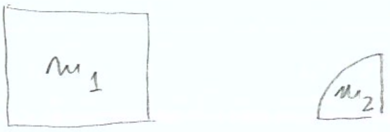
3. (7 punti) Due aste AC e CB, di massa rispettivamente $2M$ ed M, ed ugual lunghezza L sono saldate ad angolo retto nell'estremo comune C, che è vincolato a scorrere sull'asse x. Le due aste possono inoltre ruotare attorno a C. Due molle di costante elasica $k > 0$ collegano l'estremo A con l'origine O e l'estremo B con la sua proiezione ortogonale sulla retta verticale $x = 2\,L$. Determinare le configurazioni di equilibrio utilizzando le equazioni cardinali della statica.



4. (7 punti) Calcolare la matrice d'inerzia di una lamina piana omogenea di massa m costituita dal quadrato $OPQR$, di lato $2\,a$ privato di un quarto di cerchio di raggio a e centro il vertice P, rispetto al sistema solidale mostrato in figura. Determinare infine le direzioni principali d'inerzia.



4) $m_1 - m_2 = m$



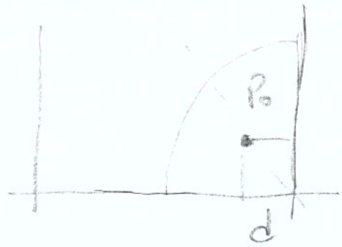
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{4a^2}{\pi a^2/4}$$

Quadrato: $I_{11} = \sigma \int_0^{2a} dx \int_0^{2a} dy\, y^2 = 2a \frac{(2a)^3}{3} \sigma = \frac{16}{3} \sigma a^4 = \frac{4}{3} m_1 a^2 = I_{22}$

$I_{33} = \frac{8}{3} m_1 a^2 \qquad I_{12} = -\sigma \int_0^{2a} dx \int_0^{2a} dy\, xy =$

Cerchio: $I_{11} = \frac{1}{4} m_2 a^2 \qquad = -\sigma \frac{(2a)^2}{2} \frac{(2a)^2}{2} = -4\sigma a^4 = -m_1 a^2$

$$I_{22} = \frac{1}{4} m_2 a^2 - m_2 d^2 + m_2 (2a - d)^2$$



$$I_{33} = \frac{1}{2} m_2 a^2 + m_2 \left[(2a-d)^2 - d^2 \right]$$

$$I_{12} = I'_{12} + m_2 d^2 - m_2 d (2a - d)$$

$$I'_{12} = -\sigma \int dS\, xy = -\sigma \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^a dr\, r\, r^2 \cos\varphi \sin\varphi =$$

$$= -\sigma \left. \frac{\sin^2\varphi}{2} \right|_{\pi/2}^{\pi} \frac{a^4}{4} = \sigma \frac{1}{8} a^4 = \frac{1}{8} \frac{m_2}{\pi a^2/4} a^4 = \frac{1}{2\pi} m_2 a^2$$

$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}(\square) - \underline{\underline{I}}($◿$)$