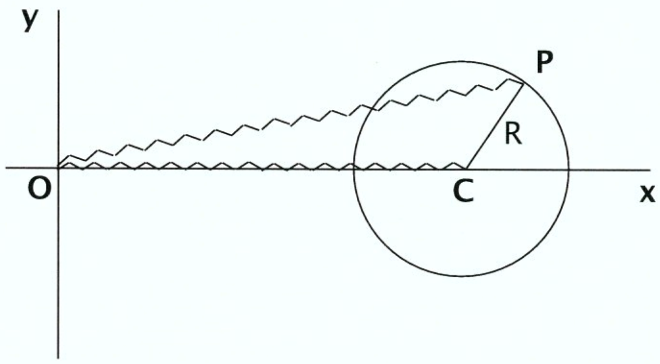
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2009/2010
Fisica Matematica

Nome ....

N. Matricola ....

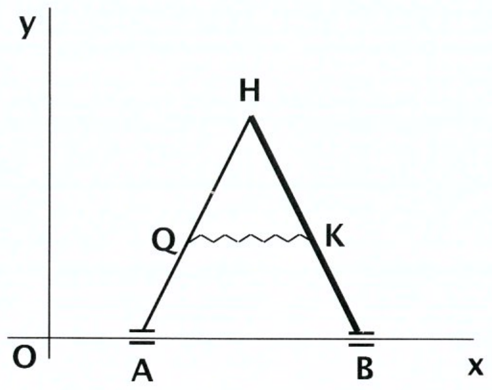
Ancona, 10 giugno 2010

1. (8 punti) Un cerchio di massa M, raggio R e centro C si muove nel piano verticale $O(x, y)$. Il centro C scorre senza attrito su una guida orizzontale, coincidente con l'asse Ox. Due molle di ugual costante elastica $k > 0$ collegano l'origine O con il centro C ed un punto P del bordo. Determinare il numero dei gradi di libertà e scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.

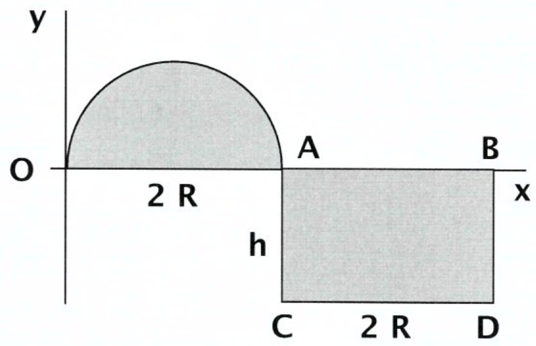


2. (7 punti) Enunciare e dimostrare il Teorema di Huygens.

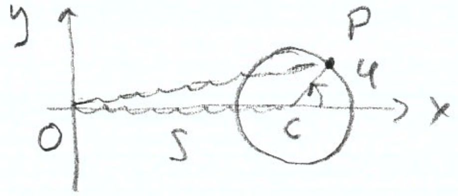
3. (8 punti) Due aste AH ed HB, di massa M e $2M$ rispettivamente ed ugual lunghezza L sono incernierate nell'estremo comune H, mentre i punti medi A e B sono vincolati a scorrere sull'asse x. I punti medi Q e K sono collegati da una molla di costante elasica $k > 0$. Determinare le configurazioni di equilibrio utilizzando le equazioni cardinali della statica.



4. (7 punti) Calcolare la matrice d'inerzia di una lamina piana omogenea di massa m ottenuta dall'unione di un semicerchio di diametro $OA = 2R$ con un rettangolo di lati $AB = 2\,R$ e $AC = h$, rispetto al sistema solidale $O(x, y, z)$ mostrato in figura. Determinare infine le direzioni principali d'inerzia.



1



$$\underline{K}(C) = I_C \dot{\varphi}\, \hat{e}_3 = I_C \dot{\varphi}\, \hat{k}$$

con $I_C = \frac{1}{2} M R^2$

$$\underline{R}^{(e)} = -k(P-O) - k(C-O) - Mg\,\hat{j} + \Phi_c\,\hat{j}$$

$$\underline{M}^{(e)}(C) = (P-C)\times[-k(P-O)] = -kR(\hat{i}\cos\varphi + \hat{j}\,\mathrm{sen}\varphi)\times[(s+R\cos\varphi)\hat{i} + \hat{j}R\,\mathrm{sen}\varphi] =$$

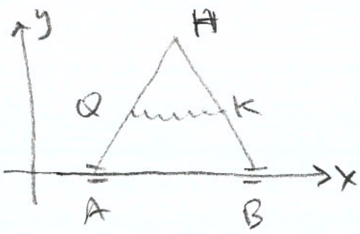
$$= -kR[\cancel{R\cos\varphi\,\mathrm{sen}\varphi} - (s+\cancel{R\cos\varphi})\,\mathrm{sen}\varphi]\,\hat{k} = kRs\sin\varphi\,\hat{k}$$

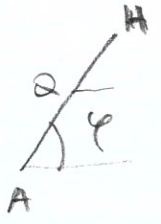
$$\begin{cases} M\ddot{s}\,\hat{i} = -k[(P-O)+(C-O)] - (Mg - \Phi_c)\,\hat{j} \\ \frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi} = kRs\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} M\ddot{s}\,\hat{i} = -k[(s+R\cos\varphi)\hat{i} + \hat{j}R\,\mathrm{sen}\varphi + s\,\hat{i}] + (\Phi_c - Mg)\,\hat{j} \\ \ddot{\varphi} = \frac{2k}{MR} s\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} M\ddot{s} = -k[2s + R\cos\varphi] \\ -kR\,\mathrm{sen}\varphi + \Phi_c - Mg = 0 \\ \ddot{\varphi} = \frac{2k}{MR} s\sin\varphi \end{cases}$$

3





Asta AH: $\begin{cases} \Phi_A\,\hat{j} + \Phi_H + k(2L\cos\varphi)\,\hat{i} - Mg\,\hat{j} = 0 \\ (H-A)\times\Phi_H + (Q-A)\times[-Mg\,\hat{j} + k(K-Q)] = 0 \end{cases}$

Asta BH: $\begin{cases} \Phi_B\,\hat{j} - \Phi_H - k(2L\cos\varphi)\,\hat{i} - 2Mg\,\hat{j} = 0 \\ (H-B)\times(-\Phi_H) + (K-B)\times[-2Mg\,\hat{j} + k(Q-K)] = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \Phi_A + \Phi_{Hy} - Mg = 0 \\ \Phi_{Hx} + 2kL\cos\varphi = 0 \\ (L\cos\varphi\, \Phi_{Hy} - L\,\mathrm{sen}\,\varphi\, \Phi_{Hx}) + \left(-Mg\frac{L}{2}\cos\varphi\right) - \frac{L}{2}k(L\cos\varphi) = 0 \quad (1) \\ \Phi_B - \Phi_{Hy} - 2Mg = 0 \\ -\Phi_{Hx} - 2kL\cos\varphi = 0 \\ (+L\cos\varphi\,\Phi_{Hy} + L\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\Phi_{Hx}) + Mg\frac{L}{2}\cos\varphi + \frac{L}{2}kL\cos\varphi = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$\Phi_{Hy} = Mg - \Phi_A = \Phi_B - 2Mg$

$\Phi_A + \Phi_B = 3Mg$

$\Phi_{Hx} = -2kL\cos\varphi$

$(1)+(2) \longrightarrow \boxed{L\cos\varphi\,\Phi_{Hy} = 0}$

$\cos\varphi = 0 \Rightarrow \Phi_{Hx} = 0$

$\longrightarrow A \equiv B$

$\Phi_{Hy} = 0 \Rightarrow \Phi_A = Mg$

$\Phi_B = 2Mg$

$\cancel{L}\,\mathrm{sen}\,\varphi(-2kL\cos\varphi) + \frac{\cancel{L}}{2}(Mg + kL)\cos\varphi = 0$

$\cos\varphi\left\{\frac{Mg+kL}{2} - 2kL\,\mathrm{sen}\,\varphi\right\} = 0 \quad \begin{cases}\cos\varphi = 0 \\ \mathrm{sen}\,\varphi = \ldots\end{cases}$

$\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{Mg + kL}{4kL}$ esiste se $\left|\quad\right| \le 1$

4

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ m_2 = m_1 \frac{2Rh}{\pi R^2/2} = \frac{4h}{\pi R} m_1 \end{cases}$$

$m_1\left(1 + \frac{4h}{\pi R}\right) = m$

$m_1 = \frac{\pi R}{\pi R + 4h} m \qquad m_2 = \ldots$

$I_{11} = \frac{1}{2} m_1 R^2 + \frac{1}{3} m_2 h^2$

$I_{22} = \frac{3}{2} m_1 R^2 + \frac{28}{3} m_2 R^2$

$I_{33} = 2 m_1 R^2 + \frac{1}{3}(h^2 + 28R^2) m_2$

$I_{12} = -m_1 dR + m_2 \frac{3}{2} Rh =$

$= \left(\frac{3}{2} R m_2 - d m_1\right) R$

dove