Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2008/2009
Fisica Matematica

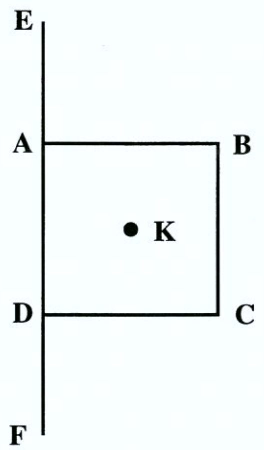
Nome:. . . . .

N. matr.:. . . . . Ancona, 21 marzo 2009

1. *(i)* (4 punti) Enunciare e dimostrare le formule di Poisson per le derivate temporali dei versori di un sistema mobile;

   (ii) (4 punti) determinare la velocità angolare di un'asta AB libera di ruotare attorno all'estremo A, a sua volta vincolato a scorrere sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R (si introducano le coordinate lagrangiane e si esprima la velocità angolare in funzione delle velocità generalizzate).

2. (7 punti) Sulla base delle simmetrie materiali, determinare la terna principale d'inerzia del corpo rigido mostrato in figura, costituito dal quadrato $ABCD$ di massa M e lato L e dall'asta EF di massa m e lato l (con $EA = DF$), rispetto al centro del quadrato K. Calcolare quindi gli elementi della matrice d'inerzia nella terna principale.



3. Un'asta materiale pesante AB di massa m e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, y)$. L'estremo A è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea r, che ruota attorno all'origine con velocità angolare costante ω. L'asta è libera di ruotare attorno ad A.

   (i) (1 punto) Determinare il numero di gradi di libertà ed introdurre le coordinate lagrangiane;

   (ii) (1 punti) scrivere tutte le forze che agiscono sull'asta;

   (iii) (3 punti) scrivere le equazioni cardinali della dinamica per l'asta;

   (iv) (3 punti) eliminare le reazioni vincolari e scrivere le equazioni del moto.

4. *(i)* (1 punto) Fornire la definizione di campo conservativo;

(ii) (1 punti) dimostrare il teorema di conservazione dell'energia per un punto materiale non vincolato sottoposto ad un campo conservativo;

(iii) (1 punti) dimostrare che un campo conservativo è irrotazionale;

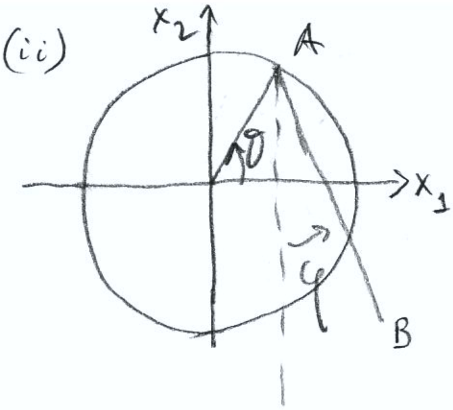
(iv) (1 punti) enunciare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un campo irrotazionale sia conservativo;

(v) (3 punti) è dato il campo di forze

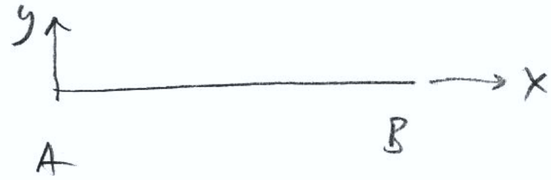
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \hat{\mathbf{i}}\, f(y,z) + \hat{\mathbf{j}}\, g(x,z) + \hat{\mathbf{k}}\, h(z)$$

definito nello spazio $\mathbb{R}^3$, con f, g ed h funzioni continue e derivabili in tutto il loro dominio; determinare le condizioni sulle tre funzioni affinchè tale campo sia conservativo.

1) (ii)



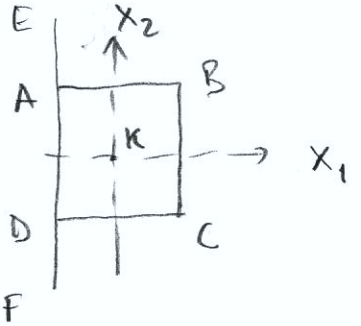
Sistema solidale



$$\begin{cases} \hat{i} = \hat{e}_1 \sin\varphi - \hat{e}_2 \cos\varphi \\ \hat{j} = \hat{e}_1 \cos\varphi + \hat{e}_2 \operatorname{sen}\varphi \end{cases} \Rightarrow \underline{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{k}$$

---

2)



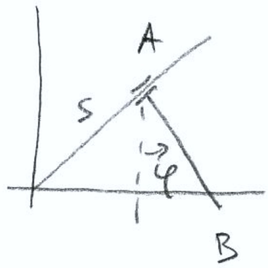
$$I_{11} = \frac{1}{12} M L^2 + \frac{1}{12} m \ell^2$$

$$I_{22} = \frac{1}{12} M L^2 + m \frac{L^2}{4} = \frac{1}{4}\left(m + \frac{M}{3}\right) L^2$$

$$I_{33} = \frac{1}{6} M L^2 + \frac{1}{12} m \ell^2 + m \frac{L^2}{4}$$

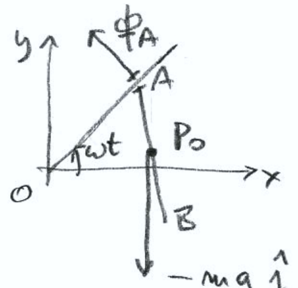
---

3)



(s, φ) coordinate Lagrangiane

Forze:



$$\begin{cases} m\,\underline{a}_0 = -mg\,\hat{j} + \Phi_A \\ \dot{\underline{K}}(P_0) = \underline{M}^{(e)}(P_0) \end{cases}$$

$$\underline{\Phi}_A = \Phi_A(-\hat{i}\operatorname{sen}\omega t + \hat{j}\cos\omega t)$$

$$P_0 - O = \frac{L}{2}(\hat{i}\operatorname{sen}\varphi - \hat{j}\cos\varphi) + s(\hat{i}\cos\omega t + \hat{j}\operatorname{sen}\omega t)$$

$$\underline{v}_0 = \frac{L}{2}\dot{\varphi}(\hat{i}\cos\varphi + \hat{j}\operatorname{sen}\varphi) + \dot{s}(\hat{i}\cos\omega t + \hat{j}\operatorname{sen}\omega t) + s\omega(-\hat{i}\operatorname{sen}\omega t + \hat{j}\cos\omega t)$$

$$\underline{a}_0 = \frac{L}{2}\left\{\ddot{\varphi}(\hat{i}\cos\varphi + \hat{j}\operatorname{sen}\varphi) + \dot{\varphi}^2(-\hat{i}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi)\right\} + (\ddot{s} - s\omega^2)(\hat{i}\cos\omega t + \hat{j}\operatorname{sen}\omega t) +$$
$$+ 2\omega\dot{s}(-\hat{i}\operatorname{sen}\omega t + \hat{j}\cos\omega t)$$

$$\underline{K}(P_0) = \frac{1}{12} m L^2 \dot{\varphi}\,\hat{k}$$

$$\underline{M}^{(e)}(P_0) = (A - P_0) \times \underline{\Phi}_A = \frac{L}{2}\Phi_A(\hat{i}\operatorname{sen}\varphi - \hat{j}\cos\varphi) \times (-\hat{i}\operatorname{sen}\omega t + \hat{j}\cos\omega t) =$$

$$= \frac{L}{2}\Phi_A(+\operatorname{sen}\varphi\cos\omega t - \cos\varphi\operatorname{sen}\omega t) =$$

$$= -\frac{L}{2}\Phi_A \operatorname{sen}(\varphi - \omega t)$$

$$\begin{cases} m\left\{\frac{L}{2}(\ddot\varphi\cos\varphi-\dot\varphi^2\operatorname{sen}\varphi)+(\ddot s-s\omega^2)\cos\omega t-2\omega\dot s\operatorname{sen}\omega t\right\}=-\phi_A\operatorname{sen}\omega t & (1)\\ m\left\{\frac{L}{2}(\ddot\varphi\operatorname{sen}\varphi+\dot\varphi^2\cos\varphi)+(\ddot s-s\omega^2)\operatorname{sen}\omega t+2\omega\dot s\cos\omega t\right\}=\phi_A\cos\omega t-mg & (2)\\ \frac{1}{12}mL^2\ddot\varphi=-\frac{L}{2}\phi_A\operatorname{sen}(\varphi-\omega t) & (3)\end{cases}$$

(1) $\cos\omega t$ + (2) $\sin\omega t$: $\quad m\frac{L}{2}\left[\ddot\varphi\cos(\varphi-\omega t)-\dot\varphi^2\operatorname{sen}(\varphi-\omega t)\right]+m(\ddot s-s\omega^2)=-mg\sin\omega t$ ⊛

(2) $\cos\omega t$ − (1) $\sin\omega t$: $\quad m\frac{L}{2}\left[\ddot\varphi\operatorname{sen}(\varphi-\omega t)+\dot\varphi^2\cos(\varphi-\omega t)\right]+2\omega\dot s=\phi_A-mg\cos\omega t$

$$\phi_A=m\frac{L}{2}\left[\ddot\varphi\sin(\varphi-\omega t)+\dot\varphi^2\cos(\varphi-\omega t)\right]+2\omega\dot s+mg\cos\omega t$$

Sostituendo nella (3) si ottiene una seconda equazione che, assieme alla ⊛, costituisce il sistema delle equazioni di moto

---

4) (v) $$\underline{\nabla}\times\underline{F}=\hat\imath\left\{\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z}\right\}+\hat\jmath\left\{\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial x}\right\}+\hat k\left\{\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right\}=$$

$$=-\frac{\partial g}{\partial z}\hat\imath+\frac{\partial f}{\partial z}\hat\jmath+\hat k\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$\Rightarrow$ deve essere $\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}=0$ e $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$

cioè g ed f costanti